ЕКСТРЕМАЛНА СТОЙНОСТ НА НЯКОИ ВЕЛИЧИНИ В РОТАЦИОННИ ТЕЛА

Сашка Топалова
Математическа гимназия „Константин Величков“, ПК:4400, гр. Пазарджик, България, sashka_topalova@abv.bg

EXTREME VALUE OF SOME MAGNITUDE IN ROTATING BODIES

Sashka Topalova
Mathematical High School "Konstantin Velichkov"
4400 Pazardzhik

ABSTRACT

The paper examines the conditions of finding extreme value of some mathematical quantity in a rotating body introduced as a mathematical work of multipliers expressing the connection between the elements of the body and their mathematical sum is a constant number.

Key words: *extreme value, rotating body*

Задачи за екстремални стойности на величини във фигури присъстват в теми за кандидатстудентски изпити по математика и в различни математически състезания. Такива задачи се срещат и в учебните помагала (виж [1], [3]). В училищния курс по математика в профилираната подготовка екстремалните задачи се разглеждат предимно като приложение на метода на производните. Той е универсален, но не винаги е най-рационален.

Екстремалните задачи имат голямо практическо приложение.

В настоящата работа са изведени условия за намиране на екстремални стойности и каква е връзката между елементите на търсените фигури.Показано е приложението на тези условия при решаването на някои задачи и са включени други задачи, които могат да се решат по подобен начин .

Разглеждаме израза **M**, който участва в аналитичен израз на някоя величина в ротационно тяло. Изразът **M** се състои от произведение на множители, всеки от които изразява връзки между елементите на ротационно тяло.

Означаваме с **a** линеен елемент на ротационно тяло или тригонометрична функция на въведен ъгъл, а **k** и **c** са константи.

Екстремалната стойност на израза **M** се намира при условие, че сборът от участващите в него множители е постоянно число.

(A) $M = a(c - ka)$

A(1) $\underset{(\text{DC})}{\text{НГС}}\ M = \frac{1}{k}\left(\frac{c}{2}\right)^2$

Най-голямата стойност на израза M се получава при $a = c - ka$, следователно

A(2) $a = \frac{c}{k+1}$

(B) $M = a(c - ka)^n$

B(1) $\underset{(DC)}{\text{НГС}}\ M = \frac{n^n}{k}\left(\frac{c}{n+1}\right)^{n+1}$, най-голямата стойност се получава при

B(2) $a = \frac{c}{k(n+1)}$

(C) $M = a^n(c - ka)$

C(1) $\underset{(DC)}{\text{НГС}}\ M = \left(\frac{n}{k}\right)^n\left(\frac{c}{n+1}\right)^{n+1}$, най-голямата стойност се получава при

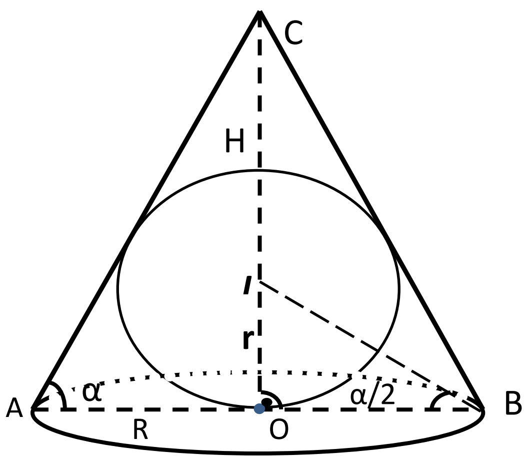
C(2) $a = \frac{nc}{k(n+1)}$

По-нататък ще покажем как с помощта на получените по-горе условия могат да бъдат решени различни екстремалните задачи.

Зад.1. От всички прави кръгови конуси намерете този, който има най-малък обем и определете стойността му, ако конусът е описан около дадена сфера с дължина на радиуса r.

Решение:

Избираме за параметър ъгълт, който образувателната на конуса сключва с основата – $\alpha, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.



Черт.1

$\Delta\, OIB: R = \frac{r}{tg\frac{\alpha}{2}}$ (черт.1)

$$\Delta\, AOC: H = \frac{2r}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 . \frac{1}{tg^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - tg^2\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Означаваме с $M = tg^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - tg^2\frac{\alpha}{2}\right)$ и $\frac{\alpha}{2} \in (0^0; 45^0)$.

Обемът на конуса е обратно пропорционален на израза M с точност до постоянен коефициент $\frac{2\pi r^2}{3}$. Следователно, за да се намери най-малка стойност на обема е необходимо да се намери най-голямата стойност на израза *M*.

При $a = tg^2\frac{\alpha}{2}$ прилагаме А(1) и получаваме, че НГС $M = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Тогава НГС $V = \frac{8\pi}{3}r^3$ и се получава съгласно А(2) при $a = \frac{1}{2}$, т.е. $tg\alpha = 2\sqrt{2}$ и $H = 4r$.

Осното сечение е остроъгълен равнобедрен триъгълник и $R{:}H{:}l = 1{:}2\sqrt{2}{:}3$.

Чрез прилагане на условията (А) могат да се решат следващите четири задачи:

Зад.2. От всички прави кръгови конуси намерете този, който има най-голямо лицето на осното си сечение и определете стойността му, ако сборът от дължините на височината и радиуса на основата е дадено число m (m>0).

Зад.3. От всички прави кръгови конуси намерете този, който има най-голям обем и определете стойността му, ако лицето на повърхнината (пълната) му е S_1.

Зад.4. От всички прави кръгови конуси намерете този, който има най-голям обем и определете стойността му, ако разстоянието от средата на образувателната му до най-отдалечената от нея точка на конуса има дължина p (p>0).

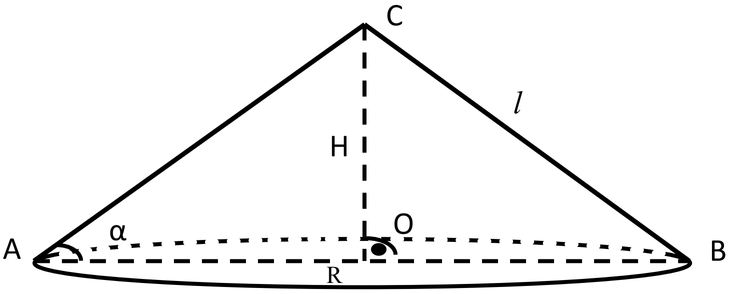
Зад.5. От всички прави кръгови цилиндри, вписани в даден конус намерете този, който има най-голямо лице на околна повърхнина и определете стойността й.

Зад.6. От всички прави кръгови конуси намерете този, който има най-голям обем и определете стойността му, ако образувателната му е с дължина l.

Решение:

Избираме за параметър ъгълт, който образувателната на конуса сключва с основата – $\alpha, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

ΔOBC: $H = l\sin\alpha,\ \ R = l\cos\alpha$ (черт.2)



Черт.2

$$V = \frac{\pi}{3} l^3 cos^2\alpha \sin\alpha$$

Означаваме с

$M = cos^2\alpha \sin\alpha$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Обемът на конуса е правопропорционален на израза M с точност до постоянен коефициент $\frac{\pi l^3}{3}$. За да се намери най-голямата стойност на обема, е необходимо да се намери най-голямата стойност на израза M. Изразите M и M^2 приемат най-големите стойности едновременно в допустимите стойности за параметъра

$M^2 = cos^4\alpha \sin^2\alpha \qquad M^2 = \sin^2\alpha\,(1 - \sin^2\alpha)^2$.

При $a = \sin^2\alpha$ прилагаме В(1) и получаваме НГС $M^2 = 2^2\left(\frac{1}{3}\right)^3$. Следователно НГС $M = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. Тогава НГС $V = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi l^3$ и се получава съгласно В(2) при $a = \frac{1}{3}$, т.е. $tg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $H = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.

Осното сечение е тъпоъгълен равнобедрен триъгълник и $R : H : l = \sqrt{2} : 1 : \sqrt{3}$.

Чрез прилагане на условията (В) могат да се решат следващите три задачи:

Зад.7. От всички прави кръгови конуси намерете този, който има най-голям обем и определете стойността му, ако лицето на околната повърхнина е S.

Зад.8. От всички прави кръгови конуси намерете този, който има най-голямо разстояние от образувателната му до най-отдалечената от нея точка на конуса и определете стойността му, ако конусът е вписан в дадена сфера с дължина на радиуса R.

Зад.9. От всички прави кръгови конуси намерете този, който има най-голямо лице на околната повърхнина и определете стойността му, ако конусът е вписан в дадена сфера с дължина на радиуса R.

Зад.10. В даден прав кръгов конус е вписан друг конус така, че върхът му лежи в центъра на основата на дадения конус. Какви размери трябва да има вписаният конус, така че обемът му да бъде най-голям.

Решение:

Означаваме радиусът и височината на дадения конус съответно с R и H, а височината и обема на вписания конус съответно с h и V_1.

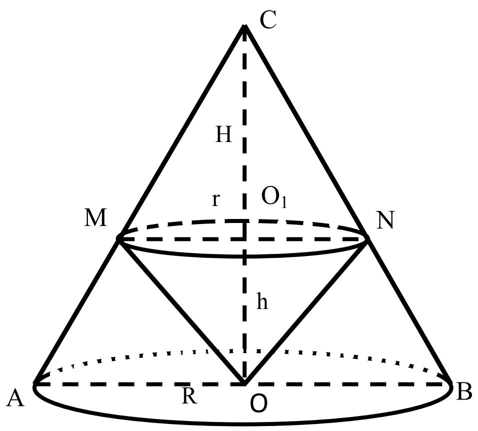
Избираме за параметър радиусът на вписания конус - $r,\ r \in (0; R)$.

$\Delta MO_1C \sim \Delta AOC$ (черт.3)

$$\frac{r}{R} = \frac{H - h}{H} \qquad h = \frac{H}{R}(R - r)$$

$$V_1 = \frac{\pi}{3}\frac{H}{3} r^2 (R - r)$$

Означаваме с $M = r^2(R - r)$ и $r \in (0; R)$.



Черт. 3

Обемът на вписания конус е правопропорционален на израза M с точност до постоянен коефициент $\frac{\pi H}{3R}$. За да се намери най-голямата стойност на обема на вписания конус, е необходимо да се намери най-голямата стойност на израза M.

При $a = r$ прилагаме С(1) и получаваме НГС $M = \left(\frac{2}{1}\right)^2 \left(\frac{R}{3}\right)^3$

Тогава НГС $V_1 = \frac{4\pi}{81} R^2 H$ и се получава съгласно С(2) при $a = \frac{2R}{3}$ и $h = \frac{H}{3}$.

Центърът на основата на вписания конус съвпада с медицентъра на осното сечение на дадения конус.

По подобен начин, като се използват условията (С) могат да се решат следващите пет задачи:

Зад.11. От всички прави кръгови конуси намерете този, който има най-голям обем и определете стойността му, ако конусът е вписан в дадена сфера с дължина на радиуса R.

Зад.12. От всички прави кръгови цилиндри, намерете този, който има най-голям обем и определете стойността му, ако цилиндърът е вписан в дадена сфера с дължина на радиуса R.

Зад.13. От всички прави кръгови цилиндри, вписани в даден конус, намерете този, който има най-голям обем и определете стойността му.

Зад.14. Ротационно тяло се получава при въртене на правоъгълен триъгълник около един от катетите си. Намерете онова ротационно тяло, което има най-голям обем и определете стойността му, ако сборът от катетите е дадено число d (d>0).

Зад.15. Ротационно тяло се получава при въртене на правоъгълник около една от страната си. Намерете онова ротационно тяло, което има най-голям обем и определете стойността му, ако периметърът на правоъгълника е 2p(p>0).

Литература

1. Паскалев,Г., Здр. Паскалева, Математика за 12 клас (профилирана подготовка), Архимед, София, 2002.
2. Кожухарова, Г., Ротационни тела, Стара Загора, 2003.
3. Коларов,К., Хр. Лесов, Сборник от задачи по геометрия VII-XII клас, част втора, Интеграл, Добрич, 2009.