ПРОГРАМНА РЕАЛИЗАЦИЯ НА МЕТОДА ПО "ПЛОЩИТЕ" ЗА ИЗЧИСЛЯВАНЕ КОЕФИЦИЕНТИТЕ В ЛИНЕЙНИ МОДЕЛИ ОТ ПРОИЗВОЛЕН РЕД I ЧАСТ

Стоянка Маджарова, Йордан Бадев, Здравко Кавазов
Университет по хранителни технологии – Пловдив, бул. Марица № 26, гр. Пловдив, 4000, България, e-mail: nitani@abv.bg

PROGRAMME IMPLEMENTATION OF THE SURFACE AREA METHOD FOR CALCULATING COEFFICIENTS IN LINEAR MODELS OF A RANDOM ROW PART 1

Stoyanka Madzharova, Jordan Badev, Zdravko Kavazov
University of Food Technologies – Plovdiv, 26 Maritsa Blvd., Plovdiv, 4000, Bulgaria, e-mail: nitani@abv.bg

ABSTRACT

Part 1 presents an algorithm made by programming methods. Control examples and the simulation results have been included. The algorithm, the program and the results have been analyzed.

Key words: *identification, step response, linear models*

УВОД

Един от основните проблеми в автоматизацията е определяне математическия модел на средствата и обектите за регулиране. Наличието на адекватни математически модели на технологичните процеси (обекти) за управление, улеснява провеждането на множество и различни експерименти с тях. По този начин чрез средствата за програмиране могат лесно, бързо и икономично да се реализират задачите по анализ и синтез на различни системи за управление на обектите.

При наличие на адекватен модел, задачата за анализ се свежда до решаване на аналитичния модел и получаване различни „реакции" на реалния физически обект. Задачата за синтез е: след като са дефинирани желаните качества на физическото устройство, да се намери аналитичния модел и да се използва за физическа реализация.

Намирането на модели адекватни на реалните технологични процеси най-често се осъществява чрез експериментални данни получени чрез опити с реалните физически обекти. Като такива данни, могат да се използват известните в Теория на Управлението (ТУ), Преходни и Честотни Характеристики (ПХ и ЧХ). В практиката, за „линейни и стационарни" процеси, като модели, най – широко приложение са намерили линейните диференциални уравнения (ЛДУ) с постоянни коефициенти, те с достатъчна точност те могат да представят голяма част от срещаните в практиката процеси. В автоматиката, ЛДУ с постоянни коефициенти и при нулеви начални условия, се представят с така наречената Предавателна Функция (ПФ). ПФ са с по компактен запис, за типови входни въздействия се решават лесно-чрез преобразованието на Лаплас и от тях се построяват известните в ТУ честотни характеристики.

Намирането на редът и конкретните стойности на коефициентите в ЛДУ, така че, достатъчно точно да възпроизвежда процесите, в автоматиката, се нарича идентификация на модела.

ТЕОРЕТИЧНА ПОСТАНОВКА НА МЕТОДЪТ НА „ПЛОЩИТЕ”:

Голяма част от промишлените процеси и апарати за автоматизация, могат да бъдат описани със следното типово диференциално уравнение:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t-\tau) \tag{1}$$

Съответната ПФ е

$$W(s) = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots a_1 s + a_0} \tag{2}$$

С последните формули могат да се представят, най – общо линейните модели на обекти, както с чисто и/или преходно закъснение в физическия процес, т.е. с експоненциален множител се представя чистото закъснение, а с по-висок ред на полинома в знаменателя се представя преходното закъснение.

Идентификацията на моделите (1) или (2), в конкретния случай се свежда до определяне да стойностите на коефициентите $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, a_n$. На практика, редът на модела (n) се предполага и се търсят зададен брой коефициенти.

Един универсален и класически метод за определяне на коефициентите в такъв вид модели е така наречения **метод на площите** . Той е универсален, защото освен коефициентите не е известен и редът на модела. Този метод представлява итерационна процедура, в която коефициентите се получават последователно, краят на процедурата се индицира с драстично изменение стойностите на следващите коефициенти.

Настоящата работа е провокирана от факта, че итерационната процедура в изчислително отношение е доста тежка и целта е тези изчисления да се автоматизират чрез средствата в изчислителната среда MATLAB. Изчисленията ще се апробират с примери, „експерименталните” данни ще се генерират с известни модели, което дава възможност за валидиране (сравняване) на получаваните резултати.

Методът на площите използва експерименталните Преходни Характеристики (ПХ). Ще се счита, че ПХ е известна, ако се знаят:

- стъпалото на входното въздействие – $\Delta u = u_{max} - u_{min}$;
- стойностите на реакцията – $y(k\Delta t)$ в моментите за $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$;
- интервала на отчитане – Δt.

Теоретичните основи на метода на площите се основават на следните разсъждения [2]:

Нека началните условия за ДУ са нулеви, това е допустимо, тъй като често ни интересува преходния процес на обекти, изведени от установен режим, т.е. предполагаме, че

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = \ldots = y^{n-1}(0) = 0 \tag{3}$$

За устойчиви процеси, при ограничени въздействия преходите завършват в краен интервал от време, т.е. могат да се приемат и нулеви крайни условия , т.е.:

$$y'(\infty) = y''(\infty) = y'''(\infty) = \ldots = y^n(\infty) = 0 \tag{4}$$

Като се приложат условията (3) и (4) от известната ПХ - $y(t)$, може да се изчисли най – младшия коефициент в знаменателя (a_0), т.е.

$$a_0 = \frac{\Delta u}{\Delta y}, \quad при \;\; u(0) = y(0) = 0, \quad a_0 = \frac{u_{max}}{y(\infty)} \tag{5}$$

$$K_{об} = \frac{1}{a_0} = \frac{y(\infty)}{u_{max}} \tag{6}$$

С $K_{об}$ е означено статичния коефициент на усилване на Обекта за Управление (ОУ).

След интегриране на ДУ (1) от 0 до ∞ и отчитане на (3) и (4) за коефициента a_1 се получава

$$a_1 = \frac{1}{y(\infty)}\left\{a_0 * \int_0^\infty [y(\infty) - y(t)]dt\right\} = \frac{a_0}{y(\infty)}\int_0^\infty S(t)dt = \frac{a_0}{y(\infty)} * const1 \quad (7)$$

Като

$$S(t) = [y(\infty) - y(t)] \text{ и } const1 = \int_0^\infty S(t)dt \quad (8)$$

След интегриране на (1) $2^{\text{-пъти}}$, най напред от t до ∞ и след това от 0 до ∞ и отчитане на (3) и (4) за a_2 се получава

$$a_2 = \frac{1}{y(\infty)}\left\{a_1 * \int_0^\infty [y(\infty) - y(t)]dt - a_0 * \int_0^\infty\int_t^\infty [y(\infty) - y(t)]dt^2\right\} \quad (9)$$

Аналогично след 2 пъти интегриране от t до ∞ и след това от 0 до ∞ и отчитане на (3) и (4) за a_3 се получава

$$a_3 = \frac{1}{y(\infty)}\left\{a_2 * \int_0^\infty [y(\infty) - y(t)]dt - a_1 * \int_0^\infty\int_t^\infty [y(\infty) - y(t)]dt^2 + a_0 * \int_0^\infty\int_t^\infty\int_t^\infty [y(\infty) - y(t)]dt^3\right\} \quad (10)$$

И така нататък за к-тия коефициент a_k, след $(k-1)$ пъти интегриране от t до ∞ и след това интегриране от 0 до ∞ и отчитане на (3) и (4) за $a_к$ се получава

$$a_k = \frac{1}{y(\infty)}\left\{a_{k-1}\int_0^\infty [y(\infty) - y(t)]dt - a_{k-1}\int_0^\infty\int_t^\infty [y(\infty) - y(t)]dt^2 + \ldots (-1)^{k+1} a_0 \int_0^\infty\int_t^\infty \ldots \int_t^\infty [y(\infty) - y(t)]\, dt^k\right\}$$

(11)

Или по кратко, за $k = 1, 2, 3, \ldots$ формулата (11), може да се запише като

$$a_k = \frac{1}{y(\infty)}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k+i+1} a_i I_{k-1}[y(\infty) - y(t)]$$

където интегралите са означени като

$$I_{k-1}[y(\infty) - y(t)] = \int_0^\infty\int_t^\infty \ldots \int_t^\infty [y(\infty) - y(t)]\, dt^k \quad (12)$$

Интегралите в (7), (9), (10), (11) и т.н. имат геометричен смисъл на площи, от където произтича и името на метода.

От получените последователно формули (7), (9), (10) и (11) се вижда че, коефициентите могат да се изчисляват итеративно, т.е. като се започне от a_1 за изчислението са необходими вече изчислените предидущи. Основна трудност на така представения метод е изчисляване на многократните интеграли във формулите.

В този случай, особеното е и факта че, интеграла е функция на t, т.е. интеграла в границите $\int_t^\infty$ се изчислява като разлика от интегралите

$$\int_t^\infty [y(\infty) - y(t)]dt = \int_0^\infty [y(\infty) - y(t)]dt - \int_0^t [y(\infty) - y(t)]dt = const1 - f(t) \quad (13)$$

Където е означено $\int_0^t [y(\infty) - y(\tau)]d\tau = f(t) = var$

Очевидно е че, последните условия са изпълнени, ако процесите (ПХ-$y(t)$) са установяващи се (устойчиви).

След заместване на (8) в (9), (10) и (11) за коефициентите a_2, a_3, a_4 се получават съответно

$$a_2 = \frac{1}{y(\infty)}\left\{ a_1 * \int_0^\infty S(t)dt - a_0 * \int_0^\infty \left[const1 - \int_0^t S(\tau)d\tau \right] dt \right\} \tag{14}$$

$$a_3 = \frac{1}{y(\infty)}\left\{ a_2 * \int_0^\infty S(t)dt - a_1 * \int_0^\infty \left[const1 - \int_0^t S(\tau)d\tau \right] dt + a_0 * \int_0^\infty \left[const2 - \int_0^t \left[const1 - \int_0^t S(\tau)d\tau \right] dt \right] dt \right. \tag{15}$$

Където е означено

$$const2 = \int_0^\infty \left[const1 - \int_0^t S(\tau)d\tau) \right] dt \tag{16}$$

По същата логика, за 4-тия коефициент се получава

$$\begin{aligned} a_4 = \frac{1}{y(\infty)}\Bigg\{ & a_3 * \int_0^\infty S(t)dt - a_2 * \int_0^\infty \left[const1 - \int_0^t S(\tau)d\tau \right] dt + a_1 * \int_0^\infty \left[const2 - \int_0^t \left[const1 - \int_0^t S(\tau)d\tau \right] dt \right] dt - \\ & - a_0 * \int_0^\infty \left[const3 - \int_0^t \left[const2 - \int_0^t \left[const1 - \int_0^t S(\tau)d\tau \right] dt \right] dt \right] dt \end{aligned} \tag{17}$$

Където е означено

$$const3 = \int_0^\infty \left[const2 - \int_0^t \left[const1 - \int_0^t S(\tau)d\tau \right] dt \right] dt \tag{18}$$

За к-тия коефициент се получава ($k = 1,2,3,4,\ \dots$)

$$\begin{aligned} a_k = \frac{1}{y(\infty)}\Bigg\{ & a_{k-1} * \int_0^\infty S(t)dt - a_{k-2} * \int_0^\infty \left[const1 - \int_0^t S(\tau)d\tau \right] dt + a_{k-3} * \int_0^\infty \left[const2 - \int_0^t \left[const1 - \int_0^t S(\tau)d\tau \right] dt \right] dt - \\ & \dots (-1)^{k-1} * a_0 * \int_0^\infty \left[const_{\ k-1} - \dots \int_0^t \left[const3 - \int_0^t \left[const2 - \int_0^t \left[const1 - \int_0^t S(\tau)d\tau \right] dt \right] dt \right] dt \dots \right] dt \end{aligned} \tag{19}$$

Където е означено

$$const_k = \underbrace{\int_0^\infty \left[const_{k-1} - \dots \int_0^t \left[const2 - \int_0^t \left[const1 - \int_0^t S(\tau)d\tau \right] dt \right] dt \dots \right] dt}_{k-пъти} \tag{20}$$

В [2] се предлага и замяната на многократния (k-кратния) интеграл в (11) с еднократен, който се изчислява по-лесно по формулата, т.е.

$$\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t [\, y(\infty) - y(t)\,] dt^{\,k} = \int_0^t \left\{ \, [\, y(\infty) - y(t)\,] * \frac{t^{\,k-1}}{(k-1)!} \, \right\} dt \tag{21}$$

(Следва продължение - II част)

ЛИТЕРАТУРА

1. Вучков И., 1990. Експериментални изследвания и идентификация, ,,Техника‘‘.
2. Петков Т., 1972. Идентификация на обектите за автоматизация, ,,Техника‘‘.