СИЛОВСКИ P-ПОДГРУПИ НА КОМУТАТИВНИ ГРУПОВИ АЛГЕБРИ НА КРАЙНИ АБЕЛЕВИ P- ГРУПИ

Велика Кунева *, Тодор Моллов и Нако Начев****

**Аграрен университет, Катедра „Математика, информатика и физика", 4000 Пловдив, България, e-mail: kuneva@au-plovdiv.bg*

*** Пловдивски университет „Паисий Хилендарски", Катедра „Алгебра и геометрия", 4000 Пловдив, България, e-mail: mollov@uni-plovdiv.bg, nachev@uni-plovdiv.bg*

SYLOW P-SUBGROUPS OF COMMUTATIVE GROUP ALGEBRAS OF FINITE ABELIAN P-GROUPS

Velika N. Kuneva*, Todor Zh. Mollovand Nako A. Nachev****

**Agricaltural university, Department of Mathematics, Informatics and Physics, 4000 Plovdiv, Bulgaria, e-mail: kuneva@au-plovdiv.bg*

*** University of Plovdiv, Departament of Algebra and Geometry, 4000 Plovdiv, Bulgaria, e-mail: mollov@uni-plovdiv.bg, nachev@uni-plovdiv.bg*

ABSTRACT

Let RG be the group algebra of a finite abelian p-group G over a direct product R of commutative indecomposable rings with identities. Suppose that V (RG) is the group of normalized units in RG and S(RG) is the Sylow p-subgroup of V (RG). In the present paper we establish the structure of S(RG) when p is an invertible element in R. This investigation extends a result of Mollov (Zbl 0655.16004) who gives a description, up to isomorphism, of the torsion subgroup of V (RG), when R is a field of characteristic different from p.

Key words: commutative group algebras, unit groups, commutative indecomposable rings, Sylow p-subgroups.

1. Предварителни резултати.

Нека R^* е мултипликативната група на пръстена R и p е просто число.
Тази работа е анонс на статията ни [1].

Дефиниция 1.1. Пръстенът R с характеристика различна от простото число p се нарича пръстен от първи род спрямо p, ако съществува естествено число $j, j \geq 2$ такова, че $R[\varepsilon_j] \neq R[\varepsilon_{j+1}]$. В противен случай R се нарича пръстен от втори род спрямо p.

От тази дефиниция следва веднага, че ако R е пръстен от втори род спрямо 2, то $R[\varepsilon_2] = R[\varepsilon_j]$за всяко естествено число $j \geq 2$.

Начев ([6] , Следствие 5.2) доказва следния резултат (леко модифициран).

Теорема 1.2. Нека R е комутативен неразложим пръстен с 1 и простото число p е обратимо в R. Ако R е пръстен от първи род спрямо p, то съществува $i \in N$, такова че ако $p \neq 2$, то

$R[\varepsilon_1] = R[\varepsilon_2] = ... = R[\varepsilon_i] \neq R[\varepsilon_{i+1}] \neq ...$

и ако p=2, то

$R[\varepsilon_2] = R[\varepsilon_3] = ... = R[\varepsilon_i] \neq R[\varepsilon_{i+1}] \neq ...;$

Ако R е пръстен от втори род спрямо p и $p \neq 2$, то $R[\varepsilon_1] = R[\varepsilon_j]$ за всяко $j \in N$.

Когато R е пръстен от първи род спрямо просто p, то числото i е дефинирано в последната теорема, се нарича константа на пръстена R спрямо p. Нека G е крайна абелева група, $G(d)$ ($d \in N$) е броят на елементите от ред d в G и $a(d) = G(d)/[R[\varepsilon_d]:R]$, където $[R[\varepsilon_d]:R]$ е размерността на свободния R-модул $R[\varepsilon_d]$ над пръстена R.

2. Основни резултати.

Ако G е абелева p-група и $k \in N$, то означаваме $G[p^k] = \{g \in G \mid g^{p^k} = 1\}$.

Нека $\coprod_n G$ и $\sum_n R$, където с $n \in N$, означава съответно копроизведението на n копия на G и директната сума на n копия на R. Нека $Z(p^\infty)$ е групата от p-тите корени на единицата, когато $n \in N$, т.е. n расте неограничено. Навсякъде в статията с N означаваме множеството от естествените числа.

Теорема 2.1. Нека G е крайна абелева p-група с експонента p^n $(n \in N)$, R е комутативен неразложим пръстен с единица, $p \in$ R* и R е пръстен от втори род спрямо p.

1) Ако или $p \neq 2$, или p=2 и $R = R[\varepsilon_2]$, то $S(RG) \cong \coprod_{(|G|-1)/[R[\varepsilon_1]:R]} Z(p^\infty)$

2) Ако p=2 и $R \neq R[\varepsilon_2]$, то $S(RG) \cong \coprod_{|G[2]|-1} Z(2\ ) \times \coprod_{|G \setminus G[2]|/2} Z(2^\infty)$

Теорема 2.2. Нека G е крайна абелева p-група с експонента p^n $(n \in N)$, R е комутативен неразложим пръстен с единица, $p \in$ R* и R е пръстен от първи род спрямо p с константа спрямо простото число p.

1) Ако или $p \neq 2$, или $p=2$ и $R = R[\varepsilon_2]$, то $S(RG) \cong \coprod_{\delta_i} Z(p^i) \times \coprod_{k=i+1}^{n} \coprod_{\delta_k} Z(p^k)$,

$\delta_i = (|G[p^i]) - 1)/[R[\varepsilon_i]:R]$, $\delta_k = |G[p^k] \setminus G[p^{k-1}]|/[R[\varepsilon_k]:R]$, $k = i+1,...,n.$

2) Ако $p=2$ и $R \neq R[\varepsilon_2]$, то $S(RG) \cong \coprod_{\delta_1} Z(2) \times \coprod_{\delta_i} Z(2^i) \times \coprod_{k=i+1}^{n} \coprod_{\delta_k} Z(p^k)$,

$\delta_1 = |G[2]| - 1)$, $\delta_i = |G[2^i] \setminus G[2]|/[R[\varepsilon_i]:R]$, $\delta_k = |G[2^k] \setminus G[2^{k-1}]|/[R[\varepsilon_k]:R]$,

$k = i+1,...,n.$

Теорема 2.3. Нека G е крайна абелева p-група и $R = \prod_{i \in I} R_i$, където R_i са комутативни неразложими пръстени с единици и p е обратим елемент в R. Тогава

$$S(RG) \cong \left(\prod_{i \in I} S(R_i G) \right)_p .$$

По-специално, ако $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$, то $S(RG) \cong \prod_{i=1}^{n} S(R_i G)$.

Описанието на $S(R_i G)$ $(i = 1,...,n)$ е дадено от Теореми 2.1. и 2.2.

За доказателствата на тези теореми използваме резултати на Моллов и Начев (вж. 2-6) .

Литература

1. Kuneva V. N., Mollov T. Zh. and Nachev N. A. (In press)
2. Sylow *p*-subgroups of commutative group algebras of finite abelian *p*-groups, C.R. Acad.Bulgar.Sci..
3. Mollov T. Zh., 1986. Multiplicative groups of semisimple group algebras, (Russian), Pliska Stud. Math. Bulgar. 8, 54-64.
4. Mollov T. Zh. and Nachev N. A., 2006. Unit groups of commutative group rings, Communications in Algebra, 34, 3835-3857.
5. Mollov T. Zh. and Nachev N. A. 2011. Isomorphism of commutative group algebras of finite abelian groups, Plovdiv University, Sci. works-Math., 38, 87-101 .
6. Nachev N. A. , 2005. Nilpotent elements and idempotents in commutative rings, Communications in Algebra, 33, 3631-3637.
7. Nachev N. A. (In press). Torsion elements in commutative indecomposable rings, C. R. Acad.Bulgar.Sci. .