ИЗПОЛЗВАНЕ НА *MATHEMATICA* ЗА ПРЕСМЯТАНИЯ С МАТРИЦИ ОТ ТРЕТИ РЕД НАД ГРАСМАНОВА АЛГЕБРА

Светла Дяковска
Русенски университет „Ангел Кънчев", 7017 Русе, ул. „Студентска" №8, България,
e-mail: sdyakovska@uni-ruse.bg

USING *MATHEMATICA* FOR CALCULATIONS WITH 3×3 MATRICES OVER THE GRASSMANN ALGEBRA

Svetla Dyakovska
Angel Kanchev University of Ruse, Studentska str.8, 7017 Ruse, Bulgaria,
e-mail: sdyakovska@uni-ruse.bg

ABSTRACT

In the paper a program for multiplying Grassmann numbers from n-dimensional Grassmann algebra written in Mathematica 6.0 is used and a program for multiplying matrices with entries from finite dimensional Grassmann algebra is done. Some identities of matrix algebra $M_3(G_n)$ are verified.

Key words: *Grassmann Algebra, , Calculations in Matrix algebra over Grassmann algebra.*

Нека K е поле с характеристика 0 и V е векторно пространство с нареден базис $\{e_1, e_2, ...\}$.

Векторното пространство R се нарича алгебра над полето K, ако в R е въведена бинарна операция "$*$", наречена умножение, така че за всеки три елемента $a,b,c \in R$ и $\forall \alpha \in K$ да е изпълнено $(a+b)*c = a*c + b*c$, $c*(a+b) = c*a + c*b$, $\alpha(a*b) = (\alpha a)*b = a*(\alpha b)$.

Асоциативната алгебра, породена от елементите на V, с определящи съотношения $e_i * e_j + e_j * e_i = 0$, за $i, j = 1,2,...$, се нарича Външна алгебра над V и се означава с $G(V)$. Елементите $e_i \in V$, $i = 1,2,...$ се наричат образуващи на $G(V)$. Произведението на елементите на Външната алгебра е познато като външно произведение или *wedge product*. За умножението в $G(V)$ се използва знакът "$\wedge$"(wedge). Външната алгебра за първи път е въведена от Херман Грасман през 1844 година и по-късно тя става известна с името Грасманова алгебра. Намира приложение в линейната алгебра, диференциалната геометрия, физичната теория на фермионите и суперсиметрията, механиката и др.

Базис на Грасмановата алгебра $G(V)$ над векторното пространство V е множеството $B = \{1\} \bigcup \{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_m} \mid 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_m, m = 1,2,...\}$. Ако V_n е векторно пространство с размерност n, то базисът на $G_n = G(V_n)$ е множеството $B_n = \{1, e_1, e_2, e_1 \wedge e_2, e_3, ..., e_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_n\}$ и $\dim G_n = 2^n$. $G_n^{'}$ е Грасмановата алгебра без единица.

За базисния елемент a, $1 \ne a = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$ числото m се нарича негова дължина. Елементите на Грасмановата алгебра се наричат Грасманови числа. Елементите на $G_n^{'}$ нямат свободен коефициент. Едно Грасманово число се нарича четно, ако е линейна комбинация на базисни елементи с четна дължина и нечетно, ако е линейна комбинация на базисни елементи с нечетна дължина.

Все по-голямото използване на външното умножение в различни научни области поражда нуждата от използване на компютърни програми за пресмятания с Грасманови числа.

Системата за математически пресмятания *Mathematica* [10], разработена от Wolfram Research, добави към съществуващите си пакети още един - GrasmmanAlgebra, създаден от Джон Браун[4]. С помощта на този пакет могат да се умножават Грасманови числа, подходящ е за пресмятания в алгебри с малък брой образуващи. Междувременно Рашкова и Михова, използвайки съответствие между целите числа от 0 до $2^n - 1$ и базисните елементи на крайномерна Грасманова алгебра създават програма за умножение на Грасманови числа[3]. По-късно тази програма е използвана за написването на нова програма, която умножава матрици от втори ред с елементи Грасманови числа и умножението между елементите е външно умножение[2]. Тези две програми са подходящи за пресмятания в матрични алгебри и с малък и с голям брой образуващи. Получени са полиномни тъждества, като е прилагана следната схема на работа: Първо се пресмята стойността на даден полином за случайни Грасманови числа и ако тя е 0 се пресмята стойността на полинома за произволни Грасманови числа с неопределени коефициенти. Това е необходимо, защото пресмятанията дори с компютър отнемат много време. По този начин се откриват зависимости, които служат като основа за формулиране и доказване на теореми, отнасящи се за полиномни тъждества над матричната алгебра от втори ред над крайномерна Грасманова алгебра. Така например са получени тъждества в множествата на квадратните матрици от втори ред с елементи само четни или само нечетни Грасманови числа[1]. Също така пресмятания с матрици над Грасманови алгебри с 1, 2, 3, 4 и 5 образуващи водят до формулирането на две хипотези[5] за тъждества с произволен брой образуващи и по-късно едната хипотеза е доказана[6]. Програмите са използвани за проверка на две тъждества от степен 8[8], чиято явна форма е дадена от Вишне[9] и са единствените примери на нестандартни тъждества в матричната алгебра от втори ред над Грасманова алгебра. Програмата от [3] е използвана за получаване на тъждества с инволюции в матрични алгебри над крайномерна Грасманова алгебра[7].

За пресмятания в матричната алгебра от трети ред над Грасманова алгебра е написана програма на *Mathematica,* която умножава матрици от трети ред с елементи Грасманови числа. В основата е програмата [3], която умножава Грасмановите числа a и b.

Използваме следните означения:

$a \wedge b$ - външно умножение на грасмановите числа a и b,

$x \wedge_m y$ - умножение на матриците x и y, елементите на които са грасманови числа и умножението на елементите е външното умножение.

Ето част от програмата, в която е описано умножението на матрици от трети ред. За да бъде умножението на елементите външно умножение използваме Package ["a∧b`"] от[3].

```
BeginPackage["x∧m y`",{"a∧b`"}]
x∧m y::usage="x∧m y-multiplies matrices with entries grassmann numbers ."
Begin["`Private`"]
x_∧m y_:={{x[[1,1]] ∧y[[1,1]]+x[[1,2]] ∧y[[2,1]]+x[[1,3]] ∧y[[3,1]],
          x[[1,1]] ∧y[[1,2]]+x[[1,2]] ∧y[[2,2]]+x[[1,3]] ∧y[[3,2]],
          x[[1,1]] ∧y[[1,3]]+x[[1,2]] ∧y[[2,3]]+x[[1,3]] ∧y[[3,3]]},
         {x[[2,1]] ∧y[[1,1]]+x[[2,2]] ∧y[[2,1]]+x[[2,3]] ∧y[[3,1]],
          x[[2,1]] ∧y[[1,2]]+x[[2,2]] ∧y[[2,2]]+x[[2,3]] ∧y[[3,2]],
          x[[2,1]] ∧y[[1,3]]+x[[2,2]] ∧y[[2,3]]+x[[2,3]] ∧y[[3,3]]},
         {x[[3,1]] ∧y[[1,1]]+x[[3,2]] ∧y[[2,1]]+x[[3,3]] ∧y[[3,1]],
```

```
        x[[3,1]] ∧y[[1,2]]+x[[3,2]] ∧y[[2,2]]+x[[3,3]] ∧y[[3,2]],
        x[[3,1]] ∧y[[1,3]]+x[[3,2]] ∧y[[2,3]]+x[[3,3]] ∧y[[3,3]]}}
End[]
EndPackage[]
```

Примери. **А.** Разглеждаме матриците

$$x = \begin{pmatrix} 2e_1+3e_2-e_1e_2 & -3e_1e_2 & 3e_1+e_2+e_1e_2 \\ 2e_1+3e_2 & 4e_1+3e_2-2e_1e_2 & 5e_1+5e_2 \\ -3e_1+3e_2+4e_1e_2 & -3e_1+2e_2+3e_1e_2 & 4e_1+e_1e_2 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$y = \begin{pmatrix} 2+2e_1+5e_2-2e_1e_2 & 4+2e_1-3e_1e_2 & 1+2e_1+4e_2+e_1e_2 \\ 3+e_1+3e_2+e_1e_2 & 2+4e_1-2e_2+2e_1e_2 & 1+2e_1+5e_2+3e_1e_2 \\ 5-2e_1-3e_2+4e_1e_2 & 3+2e_1+2e_2-3e_1e_2 & 4-e_1+2e_2+3e_1e_2 \end{pmatrix}.$$

Нека пресметнем x^2; x^3; y^2; y^3; xy и yx.

Използваме програмата като разглеждаме елементите на x и y като наредени четворки, определени от коефициентите им.

x={{{0,2,3,-1},{0,0,0,-3},{0,3,1,1}},
{{0,2,3,0},{0,4,3,-2},{0,5,5,0}},
{{0,-3,3,4},{0,-3,2,3},{0,4,0,1}}};
y={{{2,2,5,-2},{4,2,0,-3},{1,2,4,1}},
{{3,1,3,1},{2,4,-2,2},{1,2,5,3}},
{{5,-2,-3,4},{3,2,2,-3},{4,-1,2,3}}}.

1. $x^2 = x \wedge_m x =$ {{{0,0,0,12},{0,0,0,9},{0,0,0,-11}},
{{0,0,0,36},{0,0,0,25},{0,0,0,-22}},
{{0,0,0,-16},{0,0,0,-9},{0,0,0,-37}}}

$$\Rightarrow x^2 = \begin{pmatrix} 12e_1e_2 & 9e_1e_2 & -11e_1e_2 \\ 36e_1e_2 & 25e_1e_2 & -22e_1e_2 \\ -16e_1e_2 & -9e_1e_2 & -37e_1e_2 \end{pmatrix}.$$

2. $x^3 = (x \wedge_m x) \wedge_m x =$ {{{0,0,0,0},{0,0,0,0},{0,0,0,0}},
{{0,0,0,0},{0,0,0,0},{0,0,0,0}},
{{0,0,0,0},{0,0,0,0},{0,0,0,0}}}

$$\Rightarrow x^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $y^2 = y \wedge_m y =$ {{{21,26,49,4},{19,40,26,-30},{10,23,51,32}},
{{17,30,43,40},{19,34,21,-3},{9,22,45,58}},
{{39,2,32,30},{38,23,0,-14},{24,8,50,43}}}

$$\Rightarrow y^2 = \begin{pmatrix} 21+26e_1+49e_2+4e_1e_2 & 19+40e_1+26e_2-30e_1e_2 & 10+23e_1+51e_2+32e_1e_2 \\ 17+30e_1+43e_2+40e_1e_2 & 19+34e_1+21e_2-3e_1e_2 & 9+22e_1+45e_2+58e_1e_2 \\ 39+2e_1+32e_2+30e_1e_2 & 38+23e_1-14e_1e_2 & 24+8e_1+50e_2+43e_1e_2 \end{pmatrix}.$$

4. $y^3 = (y \wedge_m y) \wedge_m y =$ {{{149,328,563,254},{152,391,383,-341},{80,228,478,461}},
{{136,307,489,551},{133,382,329,4},{72,215,425,621}},
{{312,181,551,380},{304,356,250,-86},{173,187,626,538}}}

$$\Rightarrow y^3 = \begin{pmatrix} 149+328e_1+563e_2+254e_1e_2 & 152+391e_1+383e_2-341e_1e_2 & 80+228e_1+478e_2+461e_1e_2 \\ 136+307e_1+489e_2+551e_1e_2 & 133+382e_1+329e_2+4e_1e_2 & 72+215e_1+425e_2+621e_1e_2 \\ 312+181e_1+551e_2+380e_1e_2 & 304+356e_1+250e_2-86e_1e_2 & 173+187e_1+626e_2+538e_1e_2 \end{pmatrix}.$$

За матрицата x, елементите на която са Грасманови числа без свободен коефициент, получихме $\Rightarrow x^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Искаме да проверим дали ще получим същия резултат, ако елементите на матрицата са произволни Грасманови числа от този вид.

B. Разглеждаме матрица r, елементите на която са произволни Грасманови числа от $G_2^{'}$.

За въвеждане на елементите на матрицата с произволни коефициенти без свободен член използваме следната последователност:

Първо задаваме стойност 0 на свободните коефициенти на всеки един от елементите на матрицата, след това въвеждаме останалите елементи r_{ij} с функцията Array[rij,4], която извежда като резултат наредена четворка с произволни коефициенти.

r11[1]=0;r12[1]=0;r13[1]=0;
r21[1]=0;r22[1]=0;r23[1]=0;
r31[1]=0;r32[1]=0;r33[1]=0
r ={{Array[r11,4],Array[r12,4],Array[r13,4]},
{Array[r21,4],Array[r22,4],Array[r23,4]},
{Array[r31,4],Array[r32,4],Array[r33,4]}}

Тогава
r ={{{0,r11[2],r11[3],r11[4]},{0,r12[2],r12[3],r12[4]},{0,r13[2],r13[3],r13[4]}},
{{0,r21[2],r21[3],r21[4]},{0,r22[2],r22[3],r22[4]},{0,r23[2],r23[3],r23[4]}},
{{0,r31[2],r31[3],r31[4]},{0,r32[2],r32[3],r32[4]},{0,r33[2],r33[3],r33[4]}}}

Пресмятаме

$r^2 = r \wedge_m r$ ={{{0,0,0,-r12[3] r21[2]+r12[2] r21[3]-r13[3] r31[2]+r13[2] r31[3]},{0,0,0,-r11[3] r12[2]+r11[2] r12[3]-r12[3] r22[2]+r12[2] r22[3]-r13[3] r32[2]+r13[2] r32[3]},{0,0,0,-r11[3] r13[2]+r11[2] r13[3]-r12[3] r23[2]+r12[2] r23[3]-r13[3] r33[2]+r13[2] r33[3]}},{{0,0,0,r11[3] r21[2]-r11[2] r21[3]+r21[3] r22[2]-r21[2] r22[3]-r23[3] r31[2]+r23[2] r31[3]},{0,0,0,r12[3] r21[2]-r12[2] r21[3]-r23[3] r32[2]+r23[2] r32[3]},{0,0,0,r13[3] r21[2]-r13[2] r21[3]-r22[3] r23[2]+r22[2] r23[3]-r23[3] r33[2]+r23[2] r33[3]}},{{0,0,0,r11[3] r31[2]-r11[2] r31[3]+r21[3] r32[2]-r21[2] r32[3]+r31[3] r33[2]-r31[2] r33[3]},{0,0,0,r12[3] r31[2]-r12[2] r31[3]+r22[3] r32[2]-r22[2] r32[3]+r32[3] r33[2]-r32[2] r33[3]},{0,0,0,r13[3] r31[2]-r13[2] r31[3]+r23[3] r32[2]-r23[2] r32[3]}}};

$r^3 = (r \wedge_m r) \wedge_m r$ ={{{0,0,0,0},{0,0,0,0},{0,0,0,0}},

$$\{\{0,0,0,0\},\{0,0,0,0\},\{0,0,0,0\}\},$$
$$\{\{0,0,0,0\},\{0,0,0,0\},\{0,0,0,0\}\}\}$$

$$\Rightarrow r^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можем да направим извода, че матриците от трети ред над Грасманова алгебра без единичен елемент над векторно двумерно пространство удовлетворяват тъждеството $x^3 = 0$.

Този резултат може да послужи за получаване на тъждества над Грасманови алгебри с повече образуващи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михова, А ., 2009. Градуирани полиномни тъждества в матричната алгебра от втори ред над крайномерна Грасманова алгебра, Научни трудове на РУ "Ангел Кънчев", том 46, сер. 6, Русе, 16-20.
2. Михова, А ., Д. Пеева, 2008. Използване на Mathematica за пресмятания с 2×2 матрици над Грасманова алгебра, Научни трудове на РУ "Ангел Кънчев", том 47, сер. 5.1, Русе, 74-78.
3. Михова, А ., Ц. Рашкова, 2008. Използване на Mathematica за пресмятания с грасманови числа, Научни трудове на РУ "Ангел Кънчев", том 47, сер. 5.1, Русе, 22-27.
4. Browne, J., Grassmann Algebra: Exploring applications of extended vector algebra with Mathematica, Melbourne, Australia, http://sites.google.com/site/grassmann algebra.
5. Mihova, A., 2009. Mathematica for calculations in the finite dimensional Grassmann algebra, Acta Universitatis Apulensis, Special issue, Alba Iulia, Romania, 279-285.
6. Mihova, A., 2011. Polynomial Identities of the 2x2 Matrices over the Finite Dimensional Grassmann Algebra, Proceedings of the Union of Scientists – Ruse, b .5 Mathematics, Informatics and Physics, vol. 8, 13-18.
7. Rashkova, Ts., 2011. Matrix algebras over Grassmann algebra and their PI structure, Acta Acta Universitatis Apulensis, Special issue, Alba Iulia, Romania, 169-184.
8. Rashkova, Ts., A. Mihova, 2009. Vishne identities for $M_2(G)$ and their computer realization by Mathematica, Proceedings of the Union of Scientists - Ruse, b. 5 Mathematics, Informatics and Physics, vol. 7, 30-37.
9. Vishne U., 2002. Polynomial identities of $M_2(G)$, Comm. Algebra, 30, 443-454.
10. Wolfram, St., 1993. Mathematica A System for Doing Mathematica by Computer, 2-nd ed., Addision-Wesley.