

## ОТКЛОНЕНИЕ НА КУЛОНОВАТА СИЛА ОТ СИЛАТА НА ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОТО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ ДВЕ ПРОВОДЯЩИ СФЕРИ

**Кирил Коликов<sup>\*</sup>, Драгия Иванов<sup>\*\*</sup>, Стефан Божков<sup>\*</sup>, Йордан Епитропов<sup>\*</sup>**

<sup>\*</sup>Пловдивски Университет "П. Хилендарски", Факултет по математика и информатика,  
4003 Пловдив, България, [kolikov@uni-plovdiv.bg](mailto:kolikov@uni-plovdiv.bg), [bozhkov@uni-plovdiv.bg](mailto:bozhkov@uni-plovdiv.bg),  
[epitropov@uni-plovdiv.bg](mailto:epitropov@uni-plovdiv.bg)

<sup>\*\*</sup>Пловдивски Университет "П. Хилендарски", Физически факултет, 4000 Пловдив,  
България, [draiva@uni-plovdiv.bg](mailto:draiva@uni-plovdiv.bg)

### ABSTRACT

Based on the Coulomb's law the magnitude of the force of electrostatic interaction between two point charges can be calculated. However, in practice interaction between charged bodies with certain spatial dimensions and internal structure interact takes place rather than between point charges. Therefore, the problem to estimate the deviation of the Coulomb force from the electrostatic interaction force between two charged bodies arises. Taking into account the analytical expression for the electrostatic interaction force between two conducting spheres with arbitrary radii and charges derived earlier, we analyse the above mentioned problem.

**Keywords:** *Coulomb' law; conducting sphere; force of electrostatic interaction; relative inaccuracy.*

### 1. Въведение

Законът на Coulomb се отнася за големината на силата  $F_C = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$  на електростатичното взаимодействие между два точкови заряда  $Q_1$  и  $Q_2$ , намиращи се на разстояние  $R$  помежду си [5], [2] и [6]. На практика обаче не си взаимодействат точкови заряди, а заредени тела с определени размери, геометрични форми и физически структури. Поради това възниква проблемът за оценката на отклонението на *Кулоновата сила*  $F_C$  от *реалната сила*  $F$  на електростатичното взаимодействие между две наелектризирани тела. Ние решаваме този проблем за две проводящи сфери  $S_1$ ,  $S_2$  с произволни заряди  $Q_1$ ,  $Q_2$  и произволни радиуси  $r_1$ ,  $r_2$  въз основа на изведената от нас за първи път точна аналитична формула [3].

Нека  $R$  е разстоянието между центровете  $O_1$  и  $O_2$  на сферите  $S_1$  и  $S_2$  в инерциална система  $J$ . Тъй като зарядите  $Q_1$  и  $Q_2$  са равномерно разпределени по повърхнините на  $S_1$  и  $S_2$ , приемаме, че преди взаимодействието на сферите те са съсредоточени съответно в центровете  $O_1$  и  $O_2$ .

В резултат на електростатичното взаимодействие между  $S_1$  и  $S_2$ , по техните повърхнини се появяват индуцирани заряди, съответно  $\tilde{Q}_1$  и  $\tilde{Q}_2$ , които са свързани помежду си. Тогава по повърхнините на  $S_1$  и  $S_2$  остават равномерно разпределени заряди  $\bar{Q}_1$  и  $\bar{Q}_2$ , като от закона за съхранение на електричния заряд са в сила равенствата

$$(1) \quad \bar{Q}_1 = Q_1 - \tilde{Q}_1 \text{ и } \bar{Q}_2 = Q_2 - \tilde{Q}_2.$$

Формално можем да приемем, че  $\tilde{Q}_1$  и  $\tilde{Q}_2$  са разположени върху отсечката  $O_1 O_2$ , а  $\bar{Q}_1$  и  $\bar{Q}_2$  са съсредоточени в центровете  $O_1$  и  $O_2$  на сферите.

Зарядите  $\tilde{Q}_1$  и  $\tilde{Q}_2$  определяме по метода на зарядовите образи [5] и [1], а от (1)

намираме зарядите  $\bar{Q}_1$  и  $\bar{Q}_2$ . Вследствие на  $Q_i$  ( $i=1,2$ ) се пораждат зарядите-образи  $Q_{i,j}$  ( $j=1,2,3,\dots$ ).

Нека  $\delta_i = \frac{r_i}{R}$  ( $i=1,2$ ). В [3] приемаме, че биномният коефициент  $\binom{n}{0} = 1$  за всяко цяло

число  $n$  и въвеждаме за  $j=1,2,3,\dots$  следните означения:

$$\begin{aligned}
 A_{1,j} &= 1 + \sum_{k=1}^j (-1)^k \sum_{s=0}^k \binom{j-1-s}{k-s} \binom{j-k+s}{s} \delta_1^{2(k-s)} \delta_2^{2s}, \\
 A_{2,j} &= 1 + \sum_{k=1}^j (-1)^k \sum_{s=0}^k \binom{j-1-s}{k-s} \binom{j-k+s}{s} \delta_1^{2s} \delta_2^{2(k-s)}, \\
 B_{1,j} &= 1 + \sum_{k=1}^j (-1)^k \sum_{s=0}^k \binom{j-s}{k-s} \binom{j-k+s}{s} \delta_1^{2(k-s)} \delta_2^{2s}, \\
 B_{2,j} &= 1 + \sum_{k=1}^j (-1)^k \sum_{s=0}^k \binom{j-s}{k-s} \binom{j-k+s}{s} \delta_1^{2s} \delta_2^{2(k-s)}.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Означаваме с  $d_{i,j}$  ( $i=1,2; j=1,2,3,\dots$ ) разстоянието от заряда  $Q_{i,j}$  до центъра  $O_1$  или  $O_2$  на сферата, в която лежи  $O_{i,j}$ . Тогава доказваме, че

$$d_{1,2m-1} = \delta_2^2 R \frac{A_{1,m-1}}{B_{1,m-1}}, \quad d_{1,2m} = \delta_1^2 R \frac{B_{1,m-1}}{A_{1,m}}, \quad d_{2,2m-1} = \delta_1^2 R \frac{A_{2,m-1}}{B_{2,m-1}}, \quad d_{2,2m} = \delta_2^2 R \frac{B_{2,m-1}}{A_{2,m}}.
 \tag{3}$$

След това установяваме, че:

$$Q_{1,2m-1} = -\frac{\delta_1^{m-1} \delta_2^m}{B_{1,m-1}} \bar{Q}_1, \quad Q_{1,2m} = \frac{\delta_1^m \delta_2^m}{A_{1,m}} \bar{Q}_1, \quad Q_{2,2m-1} = -\frac{\delta_1^m \delta_2^{m-1}}{B_{2,m-1}} \bar{Q}_2, \quad Q_{2,2m} = \frac{\delta_1^m \delta_2^m}{A_{2,m}} \bar{Q}_2.
 \tag{4}$$

Освен това в [3] полагаме

$$X_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta_1^m \delta_2^m}{A_{1,m}}, \quad X_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta_1^m \delta_2^m}{A_{2,m}}, \quad Y_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta_1^{m-1} \delta_2^m}{B_{1,m-1}}, \quad Y_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta_1^m \delta_2^{m-1}}{B_{2,m-1}},
 \tag{5}$$

където  $\delta_i^0 = 1$  при  $\delta_i = 0$  ( $i=1,2$ ), и получаваме:

$$\bar{Q}_1 = \frac{Q_1(1+X_2)+Q_2Y_2}{(1+X_1)(1+X_2)-Y_1Y_2}, \quad \bar{Q}_2 = \frac{Q_2(1+X_1)+Q_1Y_1}{(1+X_1)(1+X_2)-Y_1Y_2}.
 \tag{6}$$

Въз основа на формули (4–6) се намират зарядите-образи  $Q_{i,j}$  ( $i=1,2; j=1,2,3,\dots$ ).

Означаваме зарядите от формула (4), които са разположени в сферата  $S_1$  с  $Q'_j$ , а тези, които са разположени в сферата  $S_2$  с  $Q''_j$  ( $j=0,1,2,\dots$ ). Така  $Q_{1,0} = \bar{Q}_1 = Q'_0$  и  $Q_{2,0} = \bar{Q}_2 = Q''_0$ , а за  $m=1,2,3,\dots$  имаме  $Q_{2,2m-1} = Q'_{2m-1}$ ,  $Q_{1,2m} = Q'_{2m}$  и  $Q_{1,2m-1} = Q''_{2m-1}$ ,  $Q_{2,2m} = Q''_{2m}$ . Съответните им разстояния от формула (3) означаваме с  $d'_j$  и  $d''_j$  ( $j=0,1,2,\dots$ ). Тогава, ако  $\delta'_j = \frac{d'_j}{R}$ , а

$\delta''_j = \frac{d''_j}{R}$ , то съгласно закона на Кулон, за големината  $F$  на проекцията на силата на взаимодействие върху  $O_1O_2$ , действаща на сфери  $S_1$  и  $S_2$ , се получава

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{Q'_j Q''_i}{(1-\delta'_j - \delta''_i)^2}.
 \tag{7}$$

**2. Връзка между кулоновата сила и реалната електростатична сила за сфери с ненулеви заряди**

Както в [3–4] ще намерим коефициента на пропорционалност между силата на взаимодействие между две сфери и кулоновата сила.

Ако двете сфери са с ненулеви заряди  $Q_1 \neq 0$  и  $Q_2 \neq 0$  и  $Q_2/Q_1 = k$ , то от формула (6) следва, че  $\bar{Q}_1 = Q_1 \bar{L}_1$ ,  $\bar{Q}_2 = Q_2 \bar{L}_2$ , където

$$(8) \quad \bar{L}_1 = \frac{1 + X_2 + kY_2}{(1 + X_1)(1 + X_2) - Y_1Y_2}, \quad \bar{L}_2 = \frac{1 + X_1 + k^{-1}Y_1}{(1 + X_1)(1 + X_2) - Y_1Y_2}.$$

От равенствата (4) следва, че  $Q_{i,j} = Q_i L_{i,j}$  за  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , където за  $m = 1, 2, 3, \dots$  имаме

$$(9) \quad L_{1,2m-1} = -\frac{\delta_1^{m-1} \delta_2^m}{B_{1,m-1}} \bar{L}_1, \quad L_{1,2m} = \frac{\delta_1^m \delta_2^m}{A_{1,m}} \bar{L}_1, \quad L_{2,2m-1} = -\frac{\delta_1^m \delta_2^{m-1}}{B_{2,m-1}} k \bar{L}_2, \quad L_{2,2m} = \frac{\delta_1^m \delta_2^m}{A_{2,m}} k \bar{L}_2.$$

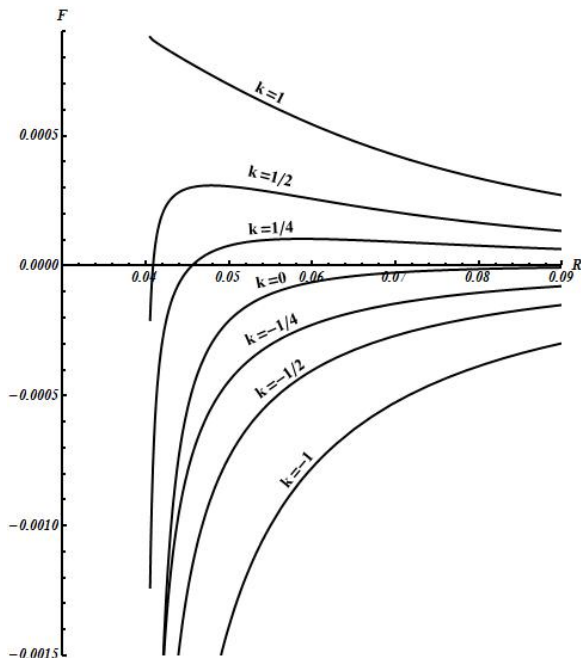
Да означим

$$(10) \quad L'_0 = \bar{L}_1, \quad L'_{2m-1} = L_{2,2m-1}, \quad L'_{2m} = L_{1,2m} \quad \text{и} \quad L''_0 = \bar{L}_2, \quad L''_{2m-1} = k^{-1} L_{1,2m-1}, \quad L''_{2m} = k^{-1} L_{2,2m}.$$

Тогава формула (7) можем да запишем във вида

$$(11) \quad F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{L'_j L''_i}{(1 - \delta'_j - \delta''_i)^2}, \quad \text{т.е.} \quad F = F_C L,$$

където коефициентът  $L = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{L'_j L''_i}{(1 - \delta'_j - \delta''_i)^2}$  се дължи на геометрията на двете сфери.



Фиг. 1

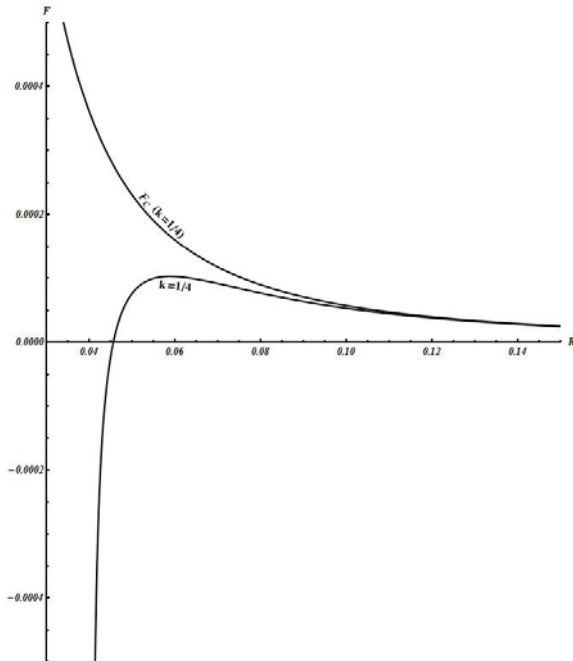
**Пример.** Нека  $S_1$  и  $S_2$  са две наелектризирани проводящи сфери с еднакви радиуси  $r_1 = r_2 = 2 \times 10^{-2}$  м. Въз основа на формула (11), на Фиг. 1 представяме семейство от графики на силата  $F$  на електростатично взаимодействие между  $S_1$  и  $S_2$ , в зависимост от разстоянието  $R$  между центровете на сферите  $O_1$  и  $O_2$ . Графиките са при различно съотношение  $k$  на зарядите им  $Q_2$  и  $Q_1$ :  $k = \frac{Q_2}{Q_1} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1$ .

Вижда се, че при едноименни заряди  $Q_1 \neq Q_2$ ,  $F > 0$ ,  $F = 0$  и  $F < 0$ , в зависимост от  $R$ . При  $Q_1 = Q_2$ ,  $F > 0$ , а при  $Q_2 = 0$ ,  $Q_1 \neq 0$  или при разноименни заряди,  $F < 0$ . Следователно поведението на силата  $F$  в

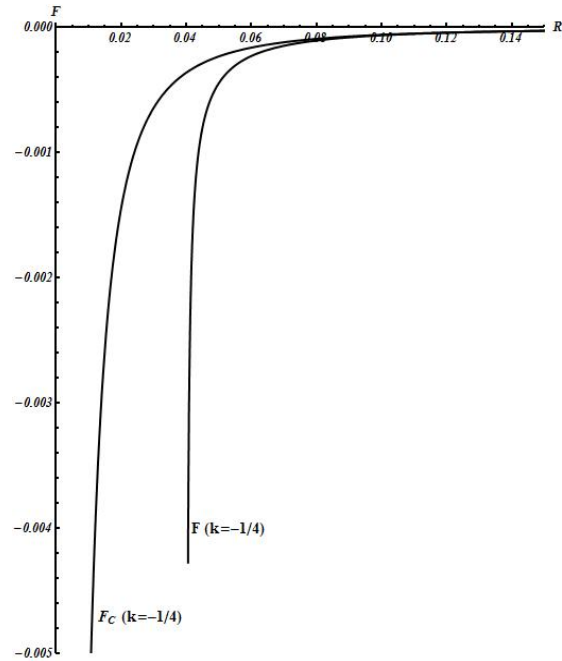
различните случаи се променя, докато ако кулоновата сила  $F_C \neq 0$  е винаги или само положителна (на отблъскване), или само отрицателна (на привличане).

На Фиг. 2а и Фиг. 2б са съпоставени графиките на  $F_C$  с изменението на  $F$  в зависимост от  $R$  за случаите на едноименни заряди – при  $k = 1/4$ , и на разноименни заряди –

при  $k = -1/4$ . Кулоновата сила  $F_C$  е определена за точкови заряди  $Q_1$  и  $Q_2$ , разположени в центровете  $O_1$  и  $O_2$  на сферите.



Фиг. 2а



Фиг. 2б

Както се вижда, идеализираната кулонова сила  $F_C \neq 0$  или само строго расте, или само строго намалява с намаляване на разстоянието  $R$ , съгласно закона  $F_C \sim R^{-2}$ . При това се оказва, че  $F_C \geq F$  за всяко  $R > r_1 + r_2$ . Този резултат следва от начина на преразпределението на зарядите в двете сфери  $S_1$  и  $S_2$ , вследствие електростатичното взаимодействие между тях.

При  $k = 1/4$  с намаляване на разстоянието  $R$  силата  $F$  първоначално е на отблъскване и постепенно расте, достига максимум, а по-нататък намалява до нула. След това приема отрицателни стойности и като сила на привличане бързо нараства с по-нататъшното намаляване на  $R$  (Фиг. 2а). Очевидно в този конкретен случай изменението на реалната сила в зависимост от  $R$  има много сложен характер и се различава драстично от кулоновата сила. При  $k = -1/4$  силата  $F < 0$  и е сила на привличане за всяко  $R$  (Фиг. 2б). Но във всички случаи, идеализираната кулонова сила на относително малки разстояния  $R$  се отклонява от реалната сила. Само на достатъчно големи разстояния, когато двете сфери могат да бъдат приети като точкови обекти, реалната сила и кулоновата сила съвпадат.

Такова сравнение на кулоновата сила с реалната сила може да бъде направено във всеки един конкретен случай.

### 3. Абсолютна и относителна неточности на кулоновата сила от силата на електростатичното взаимодействие между проводящи сфери

Ако единият заряд е нулев, например  $Q_1 \neq 0$  и  $Q_2 = 0$ , то кулоновата сила  $F_C = 0$ , а реалната сила на взаимодействие  $F$  между сферите  $S_1$  и  $S_2$  приема много големи по модул стойности при  $k = 0$ , съгласно графиката на Фиг. 1. Следователно в този случай законът на Кулон въобще не може да опише електростатичното взаимодействие, а то реално съществува.

При  $Q_1 \neq 0$  и  $Q_2 \neq 0$ , от формула (11) следва, че *абсолютната неточност*  $\Delta F_C$  на кулоновата сила  $F_C$  относно силата на електростатичното взаимодействие  $F$  между

проводящите сфери  $S_1$  и  $S_2$  е

$$(12) \quad \Delta F_C = |F_C - F| = |F_C| |1 - L|.$$

Тогава относителната неточност  $\Delta F_C^0$  на  $F_C$  относно  $F$  е

$$(13) \quad \Delta F_C^0 = \frac{\Delta F_C}{|F_C|} = |1 - L|.$$

Коефициентът  $L = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{L'_j L''_i}{(1 - \delta'_j - \delta''_i)^2}$  е безразмерна величина, зависеща само от  $r_1$ ,  $r_2$ ,

$R$  и  $k = Q_2/Q_1$ .  $L$  всъщност е функция, описваща ефекта от преразпределението на зарядите по повърхнините на сферите. При това от формули (12) и (13) следва, че колкото  $L$  е по-близо до единицата, толкова абсолютната и относителната неточности са по-малки и обратно.

Съгласно формули (8–10),  $L$  е функция на отношението  $k$ . Затова можем да изразим абсолютната и относителната неточности на  $F_C$  като функция на  $k$ .

#### 4. Заключение

Значението на закона на Coulomb практически е за всички клонове на физиката и прави този елементарен по форма и в същото време фундаментален закон един от най-полезните научни инструменти [2] и [6]. Поради това изследваният от нас проблем за намиране на отклонението на кулоновата сила  $F_C$  от силата на електростатичното взаимодействие  $F$  между две проводящи тела е от особена важност. Установаното от нас отклонение на  $F_C$  от  $F$ , в определени случаи драстично, показва колко съществено е в различните практически ситуации да се направи оценка на отклонението.

#### Благодарност

Резултатите от настоящите изследвания публикуваме с финансовата подкрепа на Фонд „Научни изследвания” към МОМН по договор № ДТК 02/35.

#### Литература

1. Будак, Б., А. Самарский, А. Тихонов, 1980. Сборник задач по математической физике, Наука, Москва.
2. Halliday, D., R. Resnick, J. Walker, 2010. Fundamentals of physics, Wiley.
3. Kolikov K., D. Ivanov, G. Krastev, Y. Epitropov, S. Bozhkov, 2012. Electrostatic interaction between two conductive spheres, J Electrostat, 70, 91-96. DOI: 10.1016/j.elstat.2011.10.008
4. Kolikov K., D. Ivanov, G. Krastev, Y. Epitropov, S. Bozhkov, Erratum to “Electrostatic interaction between two conducting spheres” [J. Electrostat. 70 (2012) 91–96] DOI: 10.1016/j.elstat.2011.10.008
5. Maxwell, J., 1954. A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. 1, Dover.
6. Rosser, W., 2010. Interpretation of classical electromagnetism, Kluwer Academic Publishers.