

## ФОРМА НА ПОТОПЕНИ КАПКИ В ТЕЧНОСТ

Кирил Коликов\*, Георги Кръстев\*\*†, Радка Колева\*

\* Пловдивски университет „П. Хилендарски“, Факултет по математика и информатика,  
4003 Пловдив, България,

e-mail: kolikov@uni-plovdiv.bg, e-mail: rkoleva@uni-plovdiv.bg

### ABSTRACT

Exact equation describing the shape of a drop submerged in liquid is not known in literature. Due to the extreme complexity of the problem, we propose an approximate solution in the present paper. We model a big liquid drop submerged in a fluid as an ellipsoid, or more precisely as two rotational paraboloids faced one toward the other and intersected with a plane perpendicular to their common axis. Using the results from Plato experiment, we determine the parameters of such drops in the present paper.

*Keywords:* Plato experiment, volumetric mass density, ellipsoid, paraboloid.

**1. Въведение.** Широко известен във физиката е и опитът на Плато в хидростатиката, при който дисперсни частици в хомогенна течност се намират в състояние на безразлично равновесие в течността, при условията на статично хомогенно гравитационно поле с интензитет  $\vec{g}$  и постоянно външно налягане над течността [3, 5]. Казаното се отнася, в частност, до капки, диспергирани в течност, която е с обемна масова плътност равна на плътността на капките. Формата на такива капки при тези условия се приема за сферична [3]. Ако капките обаче имат относително голям размер, то в течността формата им значително се отклонява от сферичната, което показват всички експерименти [2].

Обяснението на наблюдавания ефект е, че относително голямата капка приема определена форма на дадена дълбочина, вследствие действащи  $\square$  сили – гравитационна, архимедова и молекулните сили от повърхностния слой. Всъщност само в условия на безтегловност всяка капка, поставена в хомогенна течност, има сферична форма.

Определянето на точната форма на капка, диспергирана в течност, изисква използване на вариационни методи, което е сложна процедура, но в настоящата работа ще приложим известни резултати от математическата физика, което силно опростява изчисленията.

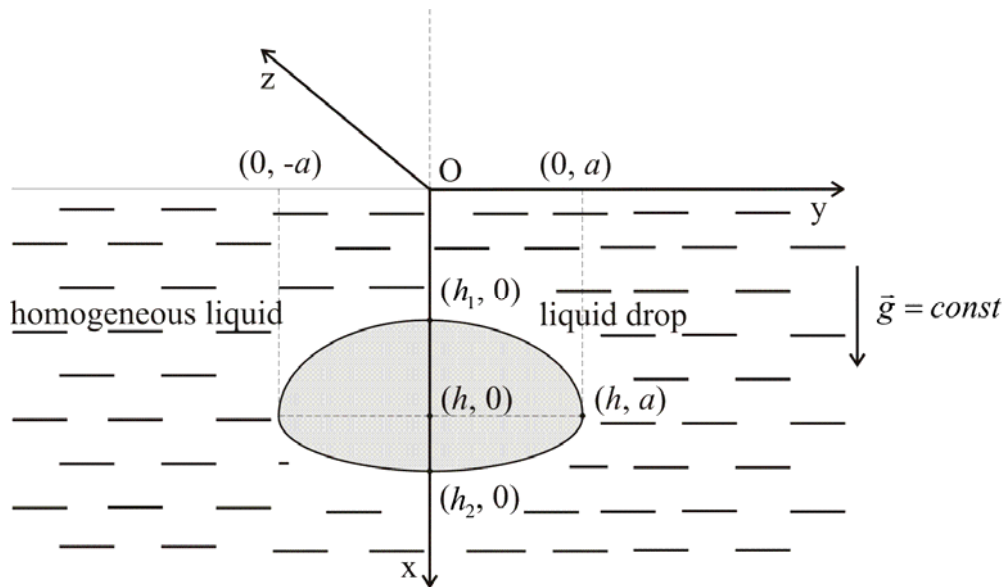
Формата на голяма капка, в течност, съгласно експериментите [2], е приблизително *ротационен елипсоид*. По-точно капката е по-изпъкнала от едната страна отколкото от другата. Затова ще моделираме големите капки или с ротационен елипсоид, или в по-добро приближение с два ротационни параболоида с обща ос, обърнати един спрямо друг и пресечени с една равнина перпендикулярна на оста им. В тази равнина лежи пресечната окръжност на двата параболоида.

Образуваното от параболоидите геометрично тяло ще наричаме *двоен ротационен параболоид*.

Проведените експерименти в [2], с цел установяване формата на голяма капка, потвърждават нашето съображение за моделирането на капката като ротационен елипсоид или по-точно като два ротационни параболоида с обща ос, обърнати един спрямо друг и пресечени с една равнина перпендикулярна на оста им.

**2. Използване опита на Плато за определяне параметрите на капката.** Навсякъде в настоящата работа ще имаме предвид дясна декартова ортогонална координатна система *Oxyz*, където точката *O* е началото на координатната система, а *x*, *y*, *z* са правоъгълните декартови координати.

Приемаме, че оста *Ox* е разположена вертикално в посока на  $\vec{g}$  и е ос на симетрия на голяма капка, потопена в течност (Фиг. 1).



Фиг. 1

Допускаме, че течността е изотермна при постоянно външно налягане и че обемната масова плътност на хомогенната течност е  $\rho_s$ , а на хомогенната капката е  $\rho_f$ , при което  $\rho_s = \rho_f$ .

Ще разглеждаме изобразената на Фиг. 1 голяма капка като *ротационен елипсоид* или като *двоен ротационен параболоид*. При това моделът двоен ротационен параболоид е толкова по-адекватен на обективната реалност, колкото повече размерът на капката е по-голям.

Ясно е, че се осъществява в равновесие на капката онзи ротационен елипсоид или онзи двоен ротационен параболоид, при който на дадена дълбочина повърхностната потенциална енергия притежава строг локален минимум.

Нека  $h_1 \geq 0$  и  $h_2 > 0$  са съответно разстоянията от най-близката и от най-отдалечената точки на капката до повърхността  $(y, z)$  на течността. Величината  $h_1$  ще наричаме *горен параметър на потапяне*, а  $h_2$  – *долен параметър на потапяне* на капката.

Капката в равновесие може да бъде разглеждана като твърдо тяло и затова средното хидростатично налягане върху повърхнината ѝ, съгласно [4], е

$$\bar{P} = \rho_s g \bar{h},$$

където  $\bar{h}$  е средноаритметичната стойност на  $h_1$  и  $h_2$ , т.е.

$$\bar{h} = \frac{h_1 + h_2}{2}. \quad (1)$$

Величината  $\bar{h}$  ще наричаме *дълбочинен параметър на потапяне* [4] на капката.

Тъй като течността практически е несвиваема, архимедовата (изтласкващата) сила, действаща на капката, не зависи нито от формата, нито от положението на капката.

Ще отбележим, че при реално провеждане опита на Плато плътността  $\rho_s$  дори на предварително хомогенизирана течност, строго казано, не е константа, а  $\rho_s = \rho_s(\bar{h})$  е слабо изменяща се функция на  $\bar{h}$ . Затова за произволна капка диспергирана в течност се нарушава строгото безразлично равновесие и тя се установява в устойчиво равновесие в течността на онази дълбочина, при която  $\rho_s = \rho_f$ . Отклонена по вертикала от това си равновесно

пространствено положение, капката, оставена сама на себе си, спонтанно се връща на същата дълбочина, както показват всички проведени експерименти [2].

Да означим

$$\frac{h_2 - h_1}{2} = b. \quad (2)$$

Формата на капката зависи от дълбочината на потапянето ѝ в течността и най-често на практика големите капки, диспергирани в течност, са с относително по-малък вертикален размер спрямо хоризонталния. Така те са сплеснати, с широчина, която приемаме за равна на  $2a$ ,  $a \geq b$  [3].

Нека в първо приближение да разгледаме капката като ротационен елипсоид с център  $(h, 0)$ . В следващо приближение – като обърнати един спрямо друг два ротационни параболоида, пресечени с равнина перпендикулярна на общата им ос  $Ox$  на разстояние  $h$  от повърхността на течността.

Обемът  $V$  на тяло и лицето  $S$  на ротационна повърхнина, получени при въртене около оста  $Ox$  на кривата с уравнение  $y = f(x)$ , съгласно [1], са

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx \quad \text{и} \quad S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (3)$$

Поради споменатата несвиваемост на течностите предполагаме постоянен обем  $V$  на капката. Тогава лицето  $S$  на повърхнината при топологични изменения също не се променя, тъй като кохезионните сили, формиращи повърхността на капката, остават едни и същи.

В случая на ротационен елипсоид от Фиг. 1 имаме уравнението на кривата в първи квадрант

$$y = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (x - h)^2},$$

където  $h = \bar{h} = \frac{h_1 + h_2}{2}$ .

Тогава за обема  $V$  на елипсоида, съгласно (3), ще е изпълнено равенството

$$V = \frac{\pi a^2}{b^2} \int_{h_1}^{h_2} [b^2 - (x - h)^2] dx.$$

Тъй като въз основа на формули (1) и (2)  $h_2 - h = h - h_1 = b$ , то за обема на ротационния елипсоид получаваме известната формула

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 b. \quad (4)$$

За лицето  $S$  на повърхнината на елипсоида, съгласно (3), ще е изпълнено равенството

$$S = 2\pi \frac{a}{b} \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{b^2 - (x - h)^2} \sqrt{1 + \frac{a^2 (x - h)^2}{b^2 [b^2 - (x - h)^2]}} dx.$$

Така

$$S = 2\pi \frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{\left(\frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 + (x - h)^2} dx$$

и оттук получаваме

$$S = 2\pi a \left( a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right). \quad (5)$$

От равенствата (1), (2), (4) и (5) можем да определим, като функция на дълбочинния параметър  $h = \bar{h}$ , радиуса  $a = a(h)$  на най-голямата хоризонтална окръжност на ротационния елипсоид.

В случая на двоен ротационен параболоид, за двата параболоида от Фиг. 1 имаме уравненията на кривите в първи квадрант, съответно

$$y = \frac{a}{\sqrt{h-h_1}} \sqrt{x-h_1} \quad \text{и} \quad y = \frac{a}{\sqrt{h_2-h}} \sqrt{h_2-x}.$$

Тогава за обемите  $V_1$  и  $V_2$  на двата параболоида, съгласно (3), ще са изпълнени съответно равенствата

$$V_1 = \frac{\pi a^2}{h-h_1} \int_{h_1}^h (x-h_1) dx \quad \text{и} \quad V_2 = \frac{\pi a^2}{h_2-h} \int_h^{h_2} (h_2-x) dx.$$

Оттук следва, че

$$V_1 = \frac{\pi a^2 (h-h_1)}{2} \quad \text{и} \quad V_2 = \frac{\pi a^2 (h_2-h)}{2}.$$

Така за обема  $V = V_1 + V_2$  на двойния ротационен параболоид получаваме

$$V = \frac{\pi a^2 (h_2-h_1)}{2} = \pi a^2 b \quad (6)$$

За лицата  $S_1$  и  $S_2$  на повърхнините на двата параболоида, съгласно (3), ще са изпълнени съответно равенствата

$$S_1 = \frac{2\pi a}{\sqrt{h-h_1}} \int_{h_1}^h \sqrt{x-h_1} \sqrt{1 + \frac{a^2}{4(h-h_1)(x-h_1)}} dx$$

и

$$S_2 = \frac{2\pi a}{\sqrt{h_2-h}} \int_h^{h_2} \sqrt{h_2-x} \sqrt{1 + \frac{a^2}{4(h_2-h)(h_2-x)}} dx.$$

От тези две равенства следва, че

$$S_1 = \frac{\pi a}{h-h_1} \int_{h_1}^h \sqrt{4(h-h_1)(x-h_1) + a^2} dx \quad \text{и} \quad S_2 = \frac{\pi a}{h_2-h} \int_h^{h_2} \sqrt{4(h_2-h)(h_2-x) + a^2} dx.$$

Решаваме двата определени интеграла и получаваме съответно

$$S_1 = \frac{\pi a}{6(h-h_1)^2} \left[ \left( 4(h-h_1)^2 + a^2 \right)^{\frac{3}{2}} - a^3 \right] \quad \text{и} \quad S_2 = \frac{\pi a}{6(h_2-h)^2} \left[ \left( 4(h_2-h)^2 + a^2 \right)^{\frac{3}{2}} - a^3 \right].$$

Оттук намираме лицето  $S = S_1 + S_2$  на повърхнината на двойния ротационен параболоид

$$S = \frac{\pi a}{6} \left\{ \frac{1}{(h-h_1)^2} \left[ \left( 4(h-h_1)^2 + a^2 \right)^{\frac{3}{2}} - a^3 \right] + \frac{1}{(h_2-h)^2} \left[ \left( 4(h_2-h)^2 + a^2 \right)^{\frac{3}{2}} - a^3 \right] \right\} \quad (7)$$

Тъй като в (6) и (7) участват параметрите  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h$  и  $a$ , то, за да се определи радиусът  $a$  на най-голямата хоризонтална окръжност на двойния ротационен параболоид от Фиг. 1 като функция на  $h$ , е необходимо да се намери експериментално освен  $h$  и един от

дълбочинните параметри  $h_1$  или  $h_2$ . Но ако с приближение приемем, че  $h = \bar{h} = \frac{h_1 + h_2}{2}$ , то  $V_1 = V_2$  и  $S_1 = S_2$ .

Тогава от (6) определяме, като функция на параметрите  $h_1$  и  $h_2$ , радиуса  $a = a(h_1, h_2)$  и по-точно

$$a = \sqrt{\frac{2V}{\pi(h_2 - h_1)}}. \quad (8)$$

От (7) и (8) можем да определим и  $h = h(h_1, h_2)$  като функция на  $h_1$  и  $h_2$ .

**3. Заключение.** Направените разглеждания и получените резултати в настоящата статия представляват значителен интерес и за екологията, медицината, биологията, хранително-вкусовата промишленост, подводното плаване и др. Може да се търси най-добрата форма на тяло, плаващо на определена дълбочина. Освен това, в течни дисперсни системи от животински или растителни клетки, формата най-вече на коагулати от тях се променя в процесите на правата или обратната седиментация. Така ще се променя и по нов, неизвестен засега начин електрическият потенциал на клетъчните им обвивки. Това неминуемо (в някои случаи дори фундаментално) ще влияе на процеса на обмяната на веществата в биосистемите.

При наличието на величини в тази статия, които не могат да бъдат определени точно аналитично от съответните уравнения, за намирането им, както и за изчисляване на максималните абсолютни и относителни неточности при измерването на тези величини за всеки конкретен случай, е уместно да се прибегне до числени методи с помощта на електронно-изчислителна техника. При това се използват данни от измервания, получени от прилагане на фотографски методи, разсейване на светлина от мътни среди и др.

#### Признателност

Резултатите от настоящите изследвания се публикуват с финансовата подкрепа на Фонд „Научни изследвания” към МОМН по договор № ДТК 02/35.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Барч, Х. Й. 1986. *Математически формули*. София, Наука и изкуство, 387-388.
2. Иванов, Д. 2009. Относно заблудата при обясняването на опита на Плато, *Физика*, 2, 114-120.
3. Кикоин, А. К., И. К., Кикоин. 1976. *Молекулярная физика*. Москва, Наука, 326.
4. Коликов, К., Г., Кръстев. 2008. Средното хидростатично налягане върху гладки повърхнини на твърди тела, *Научни трудове на СУБ Пловдив, Техника и технологии*, 7, 236-240.
5. Сущинский, Н. М. *Курс физики*. Т. 1. Москва, Наука, 1973, 263.