# ИЗСЛЕДВАНЕ НА ТЪЖДЕСТВА С ИНВОЛЮЦИЯ ТРАНСПОНИРАНЕ В МАТРИЧНАТА АЛГЕБРА ОТ ВТОРИ РЕД НАД ГРАСМАНОВА АЛГЕБРА

**Антоанета Михова**
*Русенски университет „Ангел Кънчев", 7017 Русе, ул. „Студентска" №8, България,*
*e-mail: amihova@uni-ruse.bg*

# INVESTIGATION OF IDENTITIES WITH TRANSPOSE INVOLUTION IN THE $2\times 2$ MATRIX ALGEBRA OVER THE GRASSMANN ALGEBRA

**Antoaneta Mihova**
*Angel Kanchev University of Ruse, Studentska str. 8, 7017 Ruse, Bulgaria,*
*e-mail: amihova@uni-ruse.bg*

## ABSTRACT

In the paper some identities with transpose involution in the $2\times 2$ matrix algebra over the Grassmann algebra are described. Using two programs in *Mathematica* some identities related to the standard polynomial are investigated. The first program, using an 1-1 correspondence between the integers from 0 to $2^n$-1 and the basic elements of the Grassmann algebra over *n*-dimensional vector space, multiplies Grassmann numbers. The second program multiplies matrices with entries Grassmann numbers. Some results for standard polynomial of degree *k*, *k* =2, 3, 4 and 5 are obtained.

***Key words:*** *Polynomial identities, Grassmann Algebra, Algebras with transpose involution.*

Важно направление в съвременната алгебра е намирането на полиномни тъждества в някои "интересни" и "специални" алгебри. Ако за една алгебра се поставят допълнителни условия, то могат да се направят нови изводи и обобщения за тъждествата, които тя удовлетворява. В статията са описани тъждества, получени в матричната алгебра от втори ред с инволюция транспониране, за получаването на които са използвани програми написани на *Mathematica*[9].

Нека $K$ е поле с характеристика 0, $M_p(K)$ е алгебрата на квадратните матрици от ред $p$ с елементи от полето $K$, $V$ е векторно пространство с нареден базис $\{e_i, i\in I\}$.

Линейният оператор "$*$", действащ върху алгебрата $R$ се нарича инволюция, ако $(a^*)^* = a$ и $(a\,b)^* = b^* a^*$ за произволни $a,b\in R$ (т.е. "$*$" е автоморфизъм от втори ред на $R$ ).

В матричните алгебри с точност до изоморфизъм има два основни вида инволюции – транспониране на матрици ($t$) и симплектична инволюция ($s$).

За всяка алгебра $R$ с инволюция "$*$" е в сила разлагането в директна сума на подпространства $(R,*)= R^+\oplus R^-$, като $R^+=\{r\in R\,|\, r^*=r\}$ и $R^-=\{r\in R\,|\, r^*=-r\}$, където $R^+$ и $R^-$ са съответно множествата на симетричните и антисиметричните променливи в алгебрата $(R,*)$.

Представяйки матричната алгебра $M_p(K)$ като директна сума на симетрични и антисиметрични променливи $M_p(K) = M_p^+(K)\oplus M_p^-(K)$, то изследванията за тъждествата се разделят в две посоки - изследвания на тъждества на симетрични променливи и изследвания на тъждества на антисиметрични променливи. Тъй като $\dim M_p(K)= p^2$,

$\dim M_p^+(K)=\dfrac{p(p-1)}{2}$, $\dim M_p^-(K)=\dfrac{p(p+1)}{2}$, то намалявайки броя на базисните елементи до голяма степен изследванията се улесняват.

Грасманова алгебра $G(V)$ върху векторното пространство $V$ се нарича асоциативна алгебра, породена от базисните елементите $e_i \in V,\ i=1,2,...$ с определящи съотношения $e_i e_j + e_j e_i = 0,\ \ i,j=1,2,...$. Елементите $e_i \in V,\ i=1,2,...$ на векторното пространство $V$ се наричат образуващи за Грасмановата алгебра $G(V)$.

Ако $V_n$ е крайномерно векторно пространство с размерност $n$, означаваме с $G_n = G(V_n)$ Грасмановата алгебра над $V_n$. Размерността на $G_n$ е $\dim G_n = 2^n$.

Елементите на дадена Грасманова алгебра се наричат Грасманови числа.

Тъй като базисът на $V_n$ е множеството $\{1,\ e_1,\ e_2,\ e_1\wedge e_2,\ e_3,...,e_1\wedge e_2\wedge...\wedge e_n\}$, то произволен елемент от алгебрата $G_n = G(V_n)$ се записва във вида

$$a = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_1e_2 + a_4e_3 + a_5e_1e_3 + a_6e_2e_3 + a_7e_1e_2e_3 + \cdots + a_{2^n-1}e_1e_2\dots e_n,$$

$$a_i \in K, i = 0,1,\dots,\ 2^n-1.$$

Полиномът $S_k(x_1,...,x_k)=\sum_{\sigma\in Sym(k)} sign(\sigma)x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(k)}$, където $Sym(k)$ е симетричната група от степен $k$ и знакът на пермутацията $\sigma$ е $sign(\sigma)=\pm1$, в зависимост от това дали пермутацията е четна или нечетна, се нарича стандартен полином.

За матричната алгебра $M_p(K)$ е в сила теоремата на Амицур-Левицки [3] : Полиномът $S_{2p}(x_1,...,x_{2p})=\sum_{\sigma\in Sym(2p)}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(2p)}$ е тъждество в $M_p(K)$.

През 1958 година Костант в [4] доказва, че ако инволюцията е транспониране, то за симетрични променливи е в сила тъждеството $S_{4p-2}(x_1,...,x_{4p-2})=0$ при $x_i \in M_{2p}^+(K)$ (т.е. $S_{2p-2}(x_1,...,x_{2p-2})=0$, $x_i \in M_p^+(K)$, при $p$ четно число). По-късно (1982г.) Роуен в [8] разширява твърдението за всякакви $p$.

Означаваме с $M_2(G_n)$ алгебрата на квадратните матриците от втори ред с елементи Грасманови числа от $G_n$.

В тъждествата, които по-долу разглеждаме, участва симетричния полином. За определянето му е използвана рекурентна връзка, описана в [7].

В матричната алгебра от втори ред инволюцията транспониране се задава с равенството

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Въвеждаме означенията:

$M_2^+(G_n)_t$ - множеството на симетричните променливи, относно инволюцията транспониране, в матричната алгебра $M_2(G_n)$;

$M_2^-(G_n)_t$ - множеството на антисиметричните променливи, относно инволюцията транспониране, в алгебрата $M_2(G_n)$.

В [5] е показано, че елементите на:

1. $M_2(G_1)$ удовлетворяват тъждеството $S_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$.
2. $M_2(G_2)$ и $M_2(G_3)$ удовлетворяват тъждествата $S_4^2(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$ и $S_6(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=0$.
3. $M_2(G_4)$ и $M_2(G_5)$ удовлетворяват тъждеството $S_4^3(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$.

В [6] е доказана теоремата: Алгебрата $M_2(G_n)$ удовлетворява тъждеството $S_4^p(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$, където $p$ е най-малкото цяло число, за което е изпълнено $2p>n$.

Търсим тъждества от по-ниска степен за елементите на множествата $M_2^+(G_n)_t$ и $M_2^-(G_n)_t$.

Симетричните елементи , относно инволюцията транспониране, са матрици от вида $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, а антисиметричните от вида $\begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ -x_2 & 0 \end{pmatrix}$.

Пресмятанията се извършват, като се използват програмите на *Mathematica* за умножение на грасманови числа [2] и за умножение на матрици, елементите на които са грасманови числа и умножението е външното умножение [1].

**1.** Разглеждаме матриците $l_i \in M_2^+(G_2)_t, i=1,\dots,5$, елементите на които са Грасманови числа със случайни коефициенти.

$$l_1=\begin{pmatrix} 1+2e_1+2e_2+3e_1e_2 & 2+3e_2+e_1e_2 \\ 2+3e_2+e_1e_2 & -3+2e_1+5e_2-e_1e_2 \end{pmatrix}; \quad l_2=\begin{pmatrix} 3+e_1+7e_2-3e_1e_2 & 3+2e_1+5e_2-8e_1e_2 \\ 3+2e_1+5e_2-8e_1e_2 & 3+6e_2+7e_1e_2 \end{pmatrix};$$

$$l_3=\begin{pmatrix} 4+3e_1+5e_2+6e_1e_2 & 1+2e_1+3e_2+e_1e_2 \\ 1+2e_1+3e_2+e_1e_2 & -2-3e_1+4e_2+e_1e_2 \end{pmatrix}; \quad l_4=\begin{pmatrix} 2+5e_1+7e_2+9e_1e_2 & 1+4e_1-2e_2+6e_1e_2 \\ 1+4e_1-2e_2+6e_1e_2 & 2+3e_1+8e_2+9e_1e_2 \end{pmatrix};$$

$$l_5=\begin{pmatrix} 6+5e_1+4e_2+7e_1e_2 & 1+4e_1+2e_2+6e_1e_2 \\ 1+4e_1+2e_2+6e_1e_2 & 4+3e_1+2e_2+e_1e_2 \end{pmatrix}.$$

Пресметнати са сумите $S_2$, $S_3$, $S_4$, $S_5$ и техни степени.

Матриците $S_2(l_1,l_2)$, $S_2^3(l_1,l_2)$, $S_3(l_1,l_2,l_3)$ са от вида

$$\begin{pmatrix} ae_1e_2 & b+ce_1+de_2+fe_1e_2 \\ -b-ce_1-de_2+fe_1e_2 & ae_1e_2 \end{pmatrix}.$$

$S_2^2$ и $S_3^2$ имат вида $S_2^2(l_1,l_2)=\begin{pmatrix} m+ne_1+pe_2 & qe_1e_2 \\ -qe_1e_2 & m+ne_1+pe_2 \end{pmatrix}$, където $a,b,c,f,m,n,p,q$ са също цели числа.

За $S_4$ и $S_5$ получаваме $S_4(l_1,l_2,l_3,l_4)=\begin{pmatrix} 0 & -2452e_1e_2 \\ 2452e_1e_2 & 0 \end{pmatrix}$ и

$$S_5(l_1,l_2,l_3,l_4,l_5)=\begin{pmatrix} 0 & -11104e_1e_2 \\ 11104e_1e_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тези резултати ни дават основание да заключим, че в множеството $M_2^+(G_2)_t$ полиномите $S_2$, $S_3$, $S_4$, $S_5$, $S_2^2$, $S_2^3$ и $S_3^2$ не са тъждества.

**2.** Разглеждаме матриците $k_i \in M_2^-(G_2)_t, i=1,\dots,4$. И тук елементите на матриците са Грасманови числа със случайни коефициенти.

$$k_1=\begin{pmatrix} 0 & 2+3e_2+e_1e_2 \\ -2-3e_2-e_1e_2 & 0 \end{pmatrix};\ k_3=\begin{pmatrix} 0 & -3+2e_1+7e_2+8e_1e_2 \\ 3-2e_1-7e_2-8e_1e_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$k_2=\begin{pmatrix} 0 & 3+4e_1+2e_2+e_1e_2 \\ -3-4e_1-2e_2-e_1e_2 & 0 \end{pmatrix}; k_4=\begin{pmatrix} 0 & 12+3e_2+11e_1e_2 \\ -12-3e_2-11e_1e_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пресметнати са сумите $S_2$, $S_3$, $S_2^2$, $S_2^3$ и $S_4$.

$$S_2(k_1,k_2)=\begin{pmatrix} 8e_2+24e_1e_2 & 0 \\ 0 & -8e_2+24e_1e_2 \end{pmatrix};\qquad S_3(k_1,k_2,k_3)=\begin{pmatrix} 0 & -236e_1e_2 \\ 204e_1e_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$S_2^2(k_1,k_2)=S_3^2(k_1,k_2,k_3)=S_4(k_1,k_2,k_3,k_4)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Получените последни равенства (1) ни дават основание да проверим дали тези тъждества са в сила за произволни матрици от множеството $M_2^-(G_2)_t$.

Разглеждаме матрици $m_1,m_2,m_3,m_4 \in M_2^-(G_2)_t$.

$$m_i=\begin{pmatrix} 0 & b_{i0}+b_{i1}e_1+b_{i2}e_2+b_{i3}e_1e_2 \\ -b_{i0}-b_{i1}e_1-b_{i2}e_2-b_{i3}e_1e_2 & 0 \end{pmatrix},\ i=1,\dots,4$$

и $b_{ij} \in K,\ i=1,\dots,4,\ \ j=0,\dots,3.$

След пресмятане на $S_2^2$, $S_2^3$ и $S_4$ е получено, че $S_2^2=S_2^3=S_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Проверяваме дали тези тъждества са в сила в множеството $M_2^-(G_3)_t$.

Разглеждаме произволните матрици $r_i \in M_2^-(G_3)_t, i=1,\dots,4.$.

$$r_i = \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} b_{i0} + b_{i1}e_1 + b_{i2}e_2 + b_{i3}e_1e_2 + b_{i4}e_1 + \\ + b_{i5}e_1e_3 + b_{i6}e_2e_3 + b_{i7}e_1e_2e_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -b_{i0} - b_{i1}e_1 - b_{i2}e_2 - b_{i3}e_1e_2 - b_{i4}e_1 - \\ - b_{i5}e_1e_3 - b_{i6}e_2e_3 - b_{i7}e_1e_2e_3 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}, \ i = 1,\ldots,4$$

и $b_{ij} \in K$, $i = 1,\ldots,4$, $j = 0,\ldots,7$.

И тук получаваме, че $S_2^2(r_1, r_2) = S_3^2(r_1, r_2, r_3) = S_4(r_1, r_2, r_3, r_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Така стигаме до извода:

**Твърдение**: В множествата $M_2^-(G_n)_t$ при $n = 2,3$ са в сила тъждествата:

а) $S_2^2(x_1, x_2) = 0$;

б) $S_3^2(x_1, x_2, x_3) = 0$;

в) $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$.

Предстоят проучвания в множествата на симетричните и антисиметричните променливи, относно инволюцията транспониране, в матричната алгебра $M_2(G_n)$, когато броят на образуващите $n$ е по-голям от 3.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Михова, А ., Д. Пеева, 2008. Използване на Mathematica за пресмятания с $2\times2$ матрици над Грасманова алгебра, Научни трудове на РУ “Ангел Кънчев”, том 47, сер. 5.1, Русе, 74-78.
2. Михова, А ., Ц. Рашкова, 2008. Използване на Mathematica за пресмятания с грасманови числа, Научни трудове на РУ “Ангел Кънчев”, том 47, сер. 5.1, Русе, 22-27.
3. Amitsur,S.A., J.Levitzki,1950. Minimal identities for algebras, Proc. Amer. Math. Soc.1, 449-463.
4. Kostant, B., 1958. A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levitzki and cohomology theory, J. Math. Mech. 7, 237-264.
5. Mihova, A., 2009. Mathematica for calculations in the finite dimensional Grassmann algebra, Acta Universitatis Apulensis, Special issue, Alba Iulia, Romania, 279-285.
6. Mihova, A., 2011. Polynomial Identities of the 2x2 Matrices over the Finite Dimensional Grassmann Algebra, Proceedings of the Union of Scientists – Ruse, b .5 Mathematics, Informatics and Physics, vol. 8, 13-18.
7. Rashkova,Ts., P.Rashkov, 1997. Recursive constructions in the theory of P.I. algebras, Proceeding of the 3rd International Conference “Developments in Language Theory”,Thessaloniki, 559-566.
8. Rowen,L.H., 1982. A simple proof of Kostant’s theorem and analogue for the symplectic involution, Contemp. Math.13, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 207-215.
9. Wolfram, St., 1993. Mathematica, A System for Doing Mathematica by Computer, 2-nd ed., Addision-Wesley.