ТЕОРЕТИЧЕН МОДЕЛ НА НЕГАУСОВ ФОН

Стилян Стоянов
Институт за космически и слънчево-земни изследвания – БАН
София 1000, ул. Московска 6
e-mail: zhekovz@yahoo.com

ABSTRACT

Analytical equations for calculation of dimensional correlation functions presenting non-definite non-gaussian emission with four levels of brightness are presented in this document. The models are developed through the use of Markov's processes with two conditions.

Key words: *non Gaussian background*

Моделите на фонови случайни варианти е необходимо да отразят свойствата на реални фонове и да бъдат аналитични. Сред известните модели, удовлетворяващи тези противоречиви изисквания са тези, използващи многомерен нормален закон с различни пространствени спектри [1]. Гаусовите модели не предават съществуващите в ред реални фонове, редки яркостни граници между отделни яркостни образования. Съществуват и други модели, които отразяват указаните особености на фона и позволяват пресмятането на определени характеристики на фонова реализация [2..4].

В настоящата разработка се предлага евристичен модел за случаен фон. Фона е построен на основата на модел с последователни светли и тъмни петна случаен размер от типа на шахматна дъска.

Яркостта Z за всяка точка от полето на модела е функция от два независими случайни процеса φ (x) и φ (y), реализацията на които в по взаимно перпендикулярни оси OX и OY. В качеството на случайни процеси φ (x) и φ (y) се избира Марковски прекъсващ процес с две състояния. Състоянията на процесите φ (x) и φ (y) се характеризират със стойностите a_1, a_2, b_1, b_2 съответно, а интензивността на пуасоновия поток в процесите φ(x) и φ(y) – със стойностите α_x, β_x, α_y, β_y. Марковските процеси се разглеждат в стационарен режим. За всяка двойка се определя яркостта Z.

$$Z = f(a_i,b_j)(ij = 1,2)$$

Пространствената функция на корелация на стойността Z се характеризира с израза:

$$K(\Delta x, \Delta y) = \sum_{a_i,a^|_j}\sum_{b_j,b^|_k} f(a_i b_j)f(a^|_i,b_j) \times P(a_i, b_j, a^|_i b^|_k, \Delta x, \Delta y) - \left[\sum_{a_i b_j} f(a_i,b^|_j)P(a_i,b_j)\right]^2, \quad (1)$$

Където: $a^|_i$ и $b^|_k$ отстоят от ai,bj на разстояние Δx и Δy съответно:

$P(a_i, b_i, a^|_i, b^|_k, \Delta x, \Delta y)$ – съвместни вероятностни състояния, конкретно указани в скобите.

Доколкото процесите φ(x) и φ(y) са независими,

$$P(a_i, b_j, a^|_i b^|_k, \Delta x, \Delta y) = P(a_i, a^|_i, \Delta x)P(b_j, b^|_k, \Delta y),$$

$P(a_i b_j) = P(a_i)P(b_j)$

Вероятностите,

$P(a_i a^{|}_i, \Delta x)$, $P(b_j, b^{|}_k, \Delta y)$, $P(a_i)$, $P(b_j)$

Може да се пресметнат, решавайки диференциалните уравнения за вероятностните състояния на Марковските процеси:

$$P(a_1 a^{|}_1 \Delta x) = \frac{\beta_x^2}{\lambda_x^L}(1-e^{-\lambda x|\Delta x|}) + \frac{\beta x}{\lambda x} e^{-\lambda x|\Delta x|}, \quad (2)$$

$$P(a_1, a^{|}_2, \Delta x) = P(a_2, a^{|}_1 \Delta x) = \frac{\alpha x \beta x}{\lambda_x^2}(1-e^{-\lambda x|\Delta x|}), \quad (3)$$

$$P(a_2, a^{|}_2, \Delta x) = \frac{\alpha_x^2}{\lambda_x^2}(1-e^{-\lambda x|\Delta x|}) + \frac{\alpha x}{\lambda x} e^{-\lambda x|\Delta x|}, \quad (4)$$

От формули (2), (3), (4) при $\Delta x = 0$, се получава:

$$P(a1) = \frac{\beta_x}{\lambda_x}, \quad P(a2) = \frac{\alpha_x}{\lambda_x} \quad (5)$$

Поставяйки изрази (2) .. (5) и аналитичните формули за процеса φ(у) в израза [1] се получава:

$$\begin{aligned}
K(\Delta x,\Delta y) = {} & (\lambda x \lambda y)^{-2}\{[f^2(a_1,b_1) + f^2(a1,b2)] \text{ x} \\
& \text{x } \left(e^{-\lambda y|\Delta y|}\beta_x^2 \beta y \alpha y + e^{-\lambda x|\Delta x|}\beta x \beta_y^2 \alpha x + \gamma xy\right) + \\
& + [f^2(a_2,b_1) + f^2(a_2,b_2)](e^{-\lambda y|\Delta y|}\alpha_x^2 \alpha_y \beta_y + e^{-\lambda x|\Delta x|}\alpha_x \alpha_y^2 \beta_x + \gamma_{xy} + \\
& + 2f(a_1,b_1)f(a_1,b_2)[-e^{-\lambda y|\Delta y|}\beta_x^2 \beta_y \alpha_y + \gamma_{xy}(e^{\lambda y|\Delta y|} - 1)] + 2f(a_2,b_1)f(a_1,b_1)] \text{ x} \\
& \text{x } \left[-e^{-\lambda x|\Delta x|}\alpha x \beta x \beta_y^2 + \gamma_{xy}(e^{\lambda x|\Delta x|} - 1)\right] + 2[f(a_1,b_1)f(a_2,b_2) + \\
& + f(a_1, b_2)f(a_2, b_1)] \text{ x } (1 - e^{\lambda y|\Delta y|} - e^{\lambda x|\Delta x|})\gamma_{xy} + 2f(a_1, b_2) \text{ x} \\
& \text{x } f(a_2,b_2)[-e^{-\lambda x|\Delta x|}\alpha_y^2 \alpha_x \beta_x + \gamma_{xy}(e^{\lambda y|\Delta y|} - 1)] + \\
& + 2f(a_2, b_1)f(a_2,b_2)[e^{-\lambda y|\Delta y|}\alpha_x^2 \alpha_y \beta_y + \gamma_{xy}(e^{\lambda y|\Delta y|} - 1)]\}, \quad (6)
\end{aligned}$$

където: $\gamma_{xy} = \alpha_x \alpha_y \beta_x \beta_y e^{-\lambda x|\Delta x| - \lambda y|\Delta y|}$

Посредством съотношение (6) може да се пресметнат корелационните функции на порядък от частни случаи, характеризиращи различни видове функции $z = f(a_i, b_j)$

$$z = f(a_i, b_j) = \begin{cases} c, \text{ ако } i \neq j \\ d, \text{ ако } i = j \end{cases} \qquad (7)$$

Замествайки (7) в (6) се получава:

$$K(\Delta x, \Delta y) = \left(\frac{d-c}{\lambda_x \lambda_y}\right)^2 [\alpha_y \beta_y (\beta_x - \alpha_x)^2 e^{-\lambda y|\Delta y|} + \alpha_x \beta_x (\beta_y - \alpha_y)^2 e^{-\lambda x|\Delta x|} +$$

$$+ 4\alpha_x \alpha_y \beta_x \beta_y e^{-\lambda x|\Delta x| - \lambda y|\Delta y|})] \qquad (8)$$

Ако например Δx = 0, тогава:

$$K(o,\Delta y) = \left(\frac{d-c}{\lambda_x \lambda_y}\right)^2 [\left(\beta_x^2 + \alpha_x^2 + 2\alpha_x \alpha_y \beta_x \beta_y\right) \text{ x}$$

$$\text{x } e^{-\lambda y|\Delta y|} + \alpha_x \beta_x (\beta_y - \alpha_y)^2]$$

Полагайки в (8) една от интензивностите равна на нула, получава се израз за пресмятане корелационната функция на хоризонтални или вертикални ивици със случайна ширина. В частност, ако $\alpha_x = 0$, то:

$$K(\Delta x \Delta y) = \left(\frac{d-c}{\lambda_x \lambda_y}\right)^2 \alpha_y \beta_y \beta_x^2 e^{-\lambda y|\Delta y|}$$

Представени са формули за пресмятане корелационни функции, получени на базата на съотношение (6) при различни видове функции $z = f(a_i, b_j)$

1. При $z = a_i \pm b_j$,

$$K(\Delta x, \Delta y) = \frac{\alpha x \beta x}{\lambda_x^2}(a_1 - a_2)^2 e^{-\lambda x|\Delta x|} + \frac{\alpha y \beta y}{\lambda_y^2}(b_1 - b_2)^2 e^{-\lambda y|\Delta y|} \qquad (9)$$

2. При $z = a_i b_j$,

$$K(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{\lambda_x^2 \lambda_y^2}[\alpha_y \beta_y (b_1 - b_2)^2 (a_2 \alpha_x + a_1 \beta_x)^2 e^{-\lambda x|\Delta x|} +$$

$$+ \alpha_x \alpha_y \beta_x \beta_y (b_2 - b_1)^2 (a_2 - a_1)^2 e^{-\lambda x|\Delta x| - \lambda y|\Delta y|}] \qquad (10)$$

3. При $z = \frac{a_i}{b_j}$

$$K(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{\lambda_x^2 \lambda_y^2}[\alpha_y \beta_y (a_1 \beta_x + a_2 \alpha_x)^2 \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}\right)^2 e^{-\lambda y |\Delta y|} +$$

$$+ \alpha_x \beta_x \left(\frac{\beta_y}{b_1} + \frac{\alpha_y}{b_2}\right)(a_2 - a_1)^2 e^{-\lambda x |\Delta x|} + \alpha_x \alpha_y \beta_x \beta_y \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right)^2 \text{x}$$

$$\text{x } (a_2 - a_1)^2 e^{-\lambda x |\Delta x| - \lambda y |\Delta y|}] \qquad (11)$$

Аналогично може да се пресметнат корелационни функции и за други видове зависимости $z = f(a_i, b_j)$.

Всяка от приведените по горе корелационни функции, съответствува на пространствен спектър с мощност $S(\varpi_x, \varpi_y)$:

$$S(\varpi_x, \varpi_y) = \iint K(\Delta x, \Delta y) e^{-i(\varpi x \Delta x + \varpi y \Delta y)} d(\Delta x) d(\Delta y)$$

Например аналитичния израз на спектъра, съответстващ на корелационната функция (11):

$$S(\varpi_x, \varpi_y) = \frac{1}{\lambda_x^2 \lambda_y^2}[\alpha_y \beta_y (b_1 - b_2)^2 (a_2 \alpha_x + a_1 \beta_x) \frac{2\lambda y}{\lambda_y^2 + \varpi_y^2} +$$

$$+ \alpha_x \beta_x (a_2 - a_1)^2 (b_1 \beta_y + b_2 \alpha_y)^2 \frac{2\lambda_x}{\lambda_x^2 + \varpi_x^2} + \alpha_x \alpha_y \beta_x \beta_y (b_2 - b_1)^2 \text{x}$$

$$\text{x } (a_2 - a_1)^2 \frac{4\lambda x \lambda y}{(\lambda_x^2 + \varpi_x^2)(\lambda_y^2 + \varpi_y^2)}] \qquad (12)$$

Съпоставянето на получените резултати позволява да се направи извода, че избора на функцията $z = f(a_i, b_j)$ съществено влияе на вида на корелационната функция на имитирания фон. Изменяйки стойностите α_x, α_y, β_x, β_y, а така също и a_1, a_2, b_1, b_2 може да се сдобием с приближена корелационна функция на имитирания фон към корелационната функция на реалния фон.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левшин, В.Л. Пространствена филтрация в оптических системах, М., “Наука” 1996
2. Eldering H.G. – “JOSA”, 1998, vol. 31, N12
3. Деньщиков К.К. “Приборостроение” 1997, N6
4. Шкурский Б.И. – “Техническая кибернетика”, 1999 N10