

СЪЩНОСТ И ВИДОВЕ МОДЕЛИ. ПОСТРОЯВАНЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛ

Miroslava Ivanova

Department of Informatics and Mathematics, Faculty of Economics, Trakia University, 6000, Stara Zagora, Bulgaria

E – mail: mirkaiv@yahoo.com

ВЪВЕДЕНИЕ

В последните десетилетия са разработени и продължават да се разработват и усъвършенстват математически модели за решаване на задачи от реалния свят, възникнали в различни области като икономика, бизнес, екология, селско стопанство, химическа промишленост, общо инженерство и други.

Целта на настоящата публикация е да се представят основните концепции на моделирането, а именно да се опишат видовете модели и по-специално математическият модел, използван за описание поведението на реални обекти (системи) в различни области от науката и живота.

Модел

Под понятието *модел* се разбира, изкуствено и с определена цел създаден образ на реален обект или на негови определени страни.

В това определение се съдържат следните съществени моменти:

- моделът представлява образ на реален обект или система, т.е. не може да има модел на несъществуващ обект или система;
- моделът представлява конкретни страни на обекта или системата, т.е. всеки модел се създава с определена цел, от където следва, че може да служи за решаването на ограничен обсег от конкретно поставени задачи;
- моделът пресъздава с определена точност (адекватност, изоморфност, идентичност) реалния обект или системата и в този смисъл е възможно един и същ модел да се отнася за различни обекти, в зависимост от това, кои страни на обекта или с каква степен на точност се пресъздават.

Видове модели

Моделите могат да се разделят на следните две групи:

- *веществени (физически)* – това са умалени версии на реални съществуващи обекти, създадени за изучаване, възпроизвеждане и понякога прогнозиране на поведението на реалния обект;
- *символични* – пресъздават реалния обект с помоща на някои символи като формули, чертежи, схеми, и др.

От символичните модели най-голямо значение имат математическите модели, поради универсалността на математическия език и възможността за количествена оценка и количествени преобразувания на обекта.

Математически модел

Математическият модел е абстрактен модел, използващ математиката за представяне на реално съществуващ обект, наречен още първообраз. Съставните части на математическия модел съответстват на тези на първообраза и между тях са налице връзки, аналогични на връзките в първообраза. Обикновено в модела не са застъпени всички съставни части и

връзки в моделирания обект, а се избират само онези, които според експериментатора са най-важни и значими. Поради тази причина математическият модел не представя напълно акуратно реалния обект. Оттук се поражда опасността понякога в модела да се пропуснат съществени връзки или да се представят неправилно. Едно от основните предимствата на работата с математическите модели е, че може теоретично, без лабораторни изследвания и допълнителни наблюдения да се прогнозира и управлява реалния обект.

Тъй като, задачата за построяване на математически модели на обекти е да опише математически някои зависимости (функционални, технологични, конструктивни и др.), понятието математически модел може да се счита еквивалентно с математическо описание.

Основните обекти на моделирането са многофакторните обекти, представляващи обекти, които обединяват съвкупност от взаимозависими и взаимовлияещи си фактори (параметри).

На фигура 1 е показана общата схема за конструиране и използване на многофакторен математически модел. Представени са и основните обекти имащи своето значение за моделирането (обект и субект на моделирането, цел за конструиране на модела, математическия апарат – изходните конструкции за построяването и идентификацията на модела) и процесите, реализуеми входа на конструирането и използването на модела.



Фиг 1. Процес на конструиране и използване на математически модел

Видове математически модели

В практиката са познати следните видове математически модели [1-5]:

- Линеини/нелинейни - ако използваните функции и условия са представени

изцяло от линейни уравнения, то моделът е линеен, в противен случай, когато поне една от връзките е описана с нелинейна функция, моделът е нелинеен.

- Детерминирани/вероятностни (стохастични) - детерминирани модели описват аналитично реалните процеси в обекта, докато при вероятностните има случайност и при тях се оценява вероятностното бъдещо поведение на системата, основано на предишно поведение.
- Статични/динамични – при статичните модели не се отчита същественото изменение на изследваната системата с течение на времето. Тези модели описват как една променлива зависи от стойността или състоянието на други променливи. Динамичните модели описват как системата се променя от едно състояние в друго и обикновено се представят чрез математически уравнения.
- Числени/аналитични - числените модели използват числова процедура, за да се опише поведението на системата във времето. Обикновено числените модели се представят във вид на таблици или графики. Аналитичните модели използват математически уравнения и неравенства, за да се опишат връзките.

Построяване на математически модел

Построяването на математическият модел следва две основни цели:

- формализационно описание на структурата и процеса на функциониране на системата;
- представя процеса на функциониране във вид допускащ аналитическо изследване на системата.

Процесът на създаване на математическият модел се състои от следните етапи [7]:

Етап 1. Формулиране на проблема.

Този първи етап от създаването на модела се извършва от човек или група хора, които са добре запознати с оригиналния проблем, например като икономисти, химици, биолози, физици и др. [6]. Обикновено това е доста сложен етап, тъй като в реалния свят връзките при първообраза не са ясно обусловени и често пъти могат да бъдат разгледани от различни гледни точки. Поради тази причина от изключително важно значение е да се даде точна и ясна формулировка на изследвания проблем, което от своя страна ще доведе до по-лесното и по-точно записване на проблема с математически символи и формули.

Етап 2. Създаване на реален модел.

Обикновено, не е възможно да се изразят с математически символи и формули всички фактори, които определят изучавания проблем. Поради това е необходимо изследвателя да отговори на следния въпрос: Кой от съществуващите взаимодействия са изключително важни за изследвания проблем и кои биха могли да се пренебрегнат? От отговора на този въпрос следва опростяване, което ще доведе до намаляване броя на разглежданите фактори. Това редуциране на фактори от една страна води до опростяване на модела и от друга до редуциране сложността на реалния проблем. Ето защо, целта е да се елиминира излишната информация и да се опрости възможно най-много, без да се променя проблема. Този етап на определяне, идеализация и приближение е основа на т.н. реален модел. При неговото създаване има два основни момента:

- *Определяне на независимите променливи, на параметрите на състоянието и параметрите на системата.* Тук целта е да се определят най-съществените и с

най-голямо влияние върху изследваното поведение фактори, които се дефинират като независими променливи на модела и максимално да се пренебрегнат факторите, които сравнително малко влияят върху изследваното поведение на реалния обект.

- *Определяне взаимовръзките между избраните променливи.* Понякога в самото начало е изключително трудно да се определят взаимовръзките между всички променливи. Поради това е възможно първоначално да се построят няколко подмодела и след това да се обединят в един.

Етап 3. Създаване на математически модел.

При тази етап всички взаимовръзки и взаимоотношения между избраните в етап 2 променливи се изразяват математически посредством математически символи, уравнения, неравенства, формули и пр. Като резултат реалният модел става математически модел (алгебричен модел, геометричен модел, диференциални уравнения и пр.), в който реалните количества и процеси са заместени с множества, функции, уравнения, математически операции и пр. При този етап е особено важно идентификацията между реалния свят и математическите структури. Възможно е за един и същ реален обект или реална ситуация да има повече от един математически модел. В този случай може да няма „най-добър” модел, просто единият модел е добър, когато се набляга на изследването на един признак повече, а другият модел да е по-добър, когато се изследва същия обект от друга гледна точка.

Етап 4. Решаване на модела.

На тази етап математическата система, получена в етап 3, се изучава използвайки подходящи математически методи и техники. Мотивацията за математическото изследване не е да се създава нова математика, нови абстрактни идеи, нови теореми, въпреки, че и това може да се случи, а да се получи нова информация за реално съществуващата ситуация. В действителност, тази информация може да се получи чрез използването на добре известни математически методи и техники. Най-важното в този етап е да се обединят добре известните математически резултати с изучаваната ситуация. Тъй като математиката не е напълно развита наука, не съществуват методи за решаване и изследване за всички математически обекти, поради това този етап не винаги би могъл да се завърши. При тази ситуация е необходимо връщане към етап 3, налагане на по-строги и силни предположения и редуциране на модела, т.е. получаване на система с по-малко на брой неизвестни.

Етап 5. Интерпретиране на решението.

При този етап се осъществява преход от сферата на цифрите, числата, символите, функциите и пр. към реалния свят.

Етап 6. Проверка за адекватност на модела.

На този етап се проверява дали получените резултати от теоретичното решение са съвместими с реално съществуващия обект. Да отбележим, че никога не може да има пълно покритие между получените резултати и реално съществуващия обект, тъй като за достигането до този етап са пренебрегнати реално съществуващи взаимовръзки.

При наличие на достатъчно приемливо отклонение от реално съществуващите взаимовръзки, полученият модел се приема за адекватен и се преминава към етап 7. В случай, че теоретичното решение не е адекватно, е необходимо отново да се прецени кои нови взаимовръзки да се вземат под внимание и кои да пренебрегнат, т.е. необходимо е да се премине отново през етап 2.

Етап 7. Използване на математическия модел за теоретични обяснения на наблюдавания обект, за прогнозиране на поведението и за неговото управление.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математическите модели представляват концентрирано изражение в математическа форма на основните, най-съществените връзки и зависимости, които характеризират и определят развитието на даден процес или явление. Работата с математическите модели, има следните основни предимства:

- съкращава се времето за провеждане на отделните експерименти;
- експериментирането върху математическия модел е свързано със значително по-малки разходи в сравнение с това, което се провежда върху реалния обект;
- експериментирането върху математическия модел може да бъде много по-всестранно и по-цялостно в сравнение с експериментирането върху реалните обекти;
- експериментирането върху модела не е свързано с понасянето на големи загуби, които са неизбежни при експериментиране на различни стратегии върху реални обекти.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Murray, R. Church. 1996. Applying Simulated Annealing to Location-Planning Models. *Journal of Heuristics*, 2, 31-53.
2. D. Luke, K. Stamatakis. 2012. Systems science methods in public health: dynamics, networks, and agents. *Annu Rev Public Health*, 33, 357–76.
3. I. Ball, A. Smith, J. Day, R. Pressey, H. Possingham, 2000. Comparison of Mathematical Algorithms for the Design of a Reserve System for Nature Conservation: An Application of Genetic Algorithms and Simulated Annealing. *Journal of Environmental Management*, 291-305.
4. J. Kleijnen. 1987. *Statistical tools for simulation modeling and analysis*. McGraw-Hill, New York.
5. K. Loague, R. Green. 1991: Statistical and Graphical methods for evaluating solute transport models: overview and application. *J. Contam. Hydrol*, 7, 51-73.
6. S. R. Morton, D. M. Stafford Smith, M. H. Friedel, G. E Griffin and G. Pickup, 1995. Stewardship of Arid Australia: Ecology and Landscape Management.”, *Journal of Environmental Management*, 43, 195-217.
7. http://www.fmi-plovdiv.org/pmm/documents/PMM_tema_1_extra.pdf