МАТРИЧНО ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ПРЕМЕСТВАНИЯТА В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМИ СИСТЕМИ

Златко Златанов

ТУ – София Филиал Пловдив 4000 Пловдив България zlatkozz@abv.bg

Резюме:

В статията са разгледани най-често срещаните статически определими системи – проста греда, рамка и ферма. Използван е матричен запис при определяне на преместванията и завъртанията в характерни точки, предизвикани от външни товари.

1. Въведение

Статически определими системи (СОС) са системи, при които усилията в произволно напречно сечение, предизвикани от произволен външен товар и опорните реакции могат да се определят с помощта на условията за равновесие [4].

В много задачи от инженерната практика е необходимо да се познават еластичните премествания на системата в характерни нейни точки съобразени с конструктивни изисквания или допустими деформации.

2. Постановка на задачата и формиране на матричното уравнение.

Общият израз за определяне на преместванията от външно натоварване в статически определимите системи е от вида:

$$\Delta_{mp} = \sum\int \frac{\overline{M}M_P}{EJ}ds + \sum\int \frac{\overline{N}N_P}{EF}ds + \sum\int \frac{\overline{Q}Q_P}{GF}ds;$$

където:

Δ_{mp} - преместване на точка m в зададено направление, предизвикано от външен товар P;

$\overline{M}, \overline{N}, \overline{Q}$ - разрезни усилия от виртуално натоварване $\overline{P}=1$

За конструкции, елементите на които работят предимно на огъване (греди и рамки), приносът на нормалните и напречните сили се пренебрегва [3].

Определянето на преместването на точка m в дадено направление от определено натоварване при отчитане влиянието на огъващите моменти се дава от израза:

$$\Delta_{mp} = \sum \int \frac{\overline{M}M_P}{EJ_C}\frac{J_C}{J}ds;$$

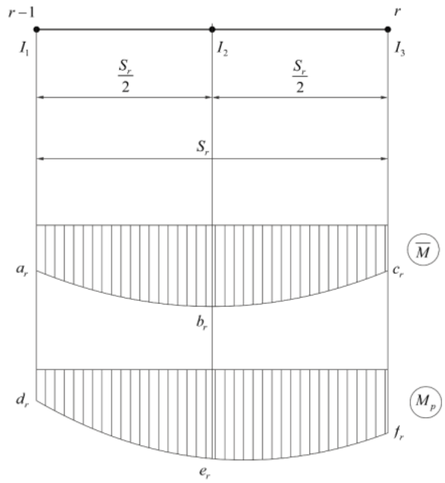
За изчисляване на интеграла на Максвел-Мор в участък (r) ***фиг. 1***, се използва формулата на Симсон, която в матрична форма има вида:

$$\left(\Delta_{mp}\right)_r = \overline{M_r^T} A_r M_{rp}$$

където:

$$\overline{M_r^T} = \left[a_r \;\; b_r \;\; c_r\right]$$

Матрица – ред. Елементи на матрицата са стойностите на моментите в участък r, получени от виртуалното натоварване $\overline{P}=1$.



Фиг. 1

$$A_r = \begin{bmatrix} \frac{J_C}{J} & 0 & 0 \\ 0 & 4\frac{J_C}{J} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_C}{J} \end{bmatrix}$$

- матрица на податливостта в участък *r*. Отчита инерционните характеристики в участъка.

$$M_{rp} = \begin{bmatrix} d_r \\ l_r \\ f_r \end{bmatrix}$$

матрица – вектор. Елементи на матрицата са стойностите на моментите в участък r, получени от външно натоварване [3].

Ако конструкцията е разделена на n участъка, общата стойност на преместването ще бъде:

$$\Delta_{mp} = \sum \left(\Delta_{mp}\right)_r = \sum \overline{M_r^T} A_r M_{rp};$$

Ако диаграмите $\overline{M}$ и M_P са праволинейни в участък r и инерционния момент в участъка е постоянен:

$$\left(\Delta_{mp}\right)_r = \begin{bmatrix} a_r & c_r \end{bmatrix} \frac{s_r}{6EJ_C} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_r \\ f_r \end{bmatrix};$$

За определяне на линейното преместване на точка в дадено направление, виртуалното натоварване е сила $\overline{P} = 1$, приложена в точка в търсеното направление. За определяне на завъртането на дадено сечение виртуалното натоварване е момент $\overline{M}=1$, приложен в същото сечение.

При ферми определянето на преместването на точка m в даденото направление от определено натоварване при отчитане влиянието на нормалните усилия в прътите се дава от израза:

$$\Delta_{mp}=\sum\frac{\overline{N}_P\,N_{rP}}{EF_r}s_r=\overline{N^T}AN_p=\left[\overline{N_1}\;\;\overline{N_2}\cdots\overline{N_r}\cdots\overline{N_n}\right].\frac{1}{EF_C}\begin{bmatrix}s_1' & 0 & 0 & 0\\ 0 & s_2' & 0 & 0\\ 0 & 0 & s_3' & 0\\ 0 & 0 & 0 & s_4'\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}N_{1P}\\ N_{2P}\\ \cdots\\ N_{rP}\\ \cdots\\ N_{nP}\end{bmatrix};$$

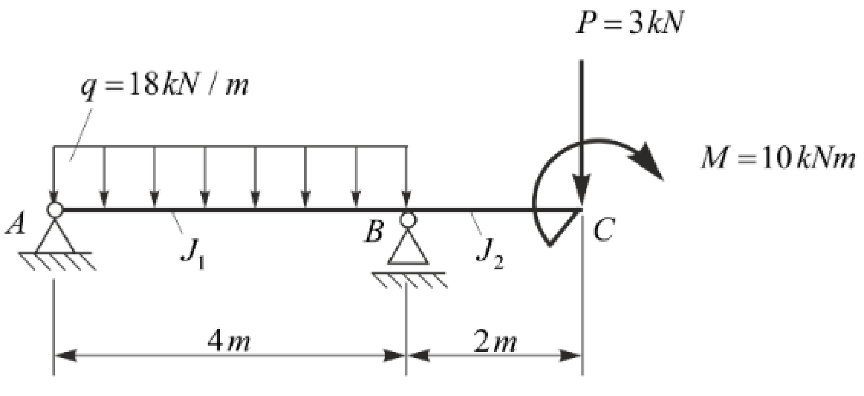
където:

$\overline{N^T}$, N_p са матрици, елементите на които са усилията в прътите на фермата $r\left(r=1,2,...\text{n}\right)$, предизвикани от виртуалното и от външното натоварване [3].

Пример 1.

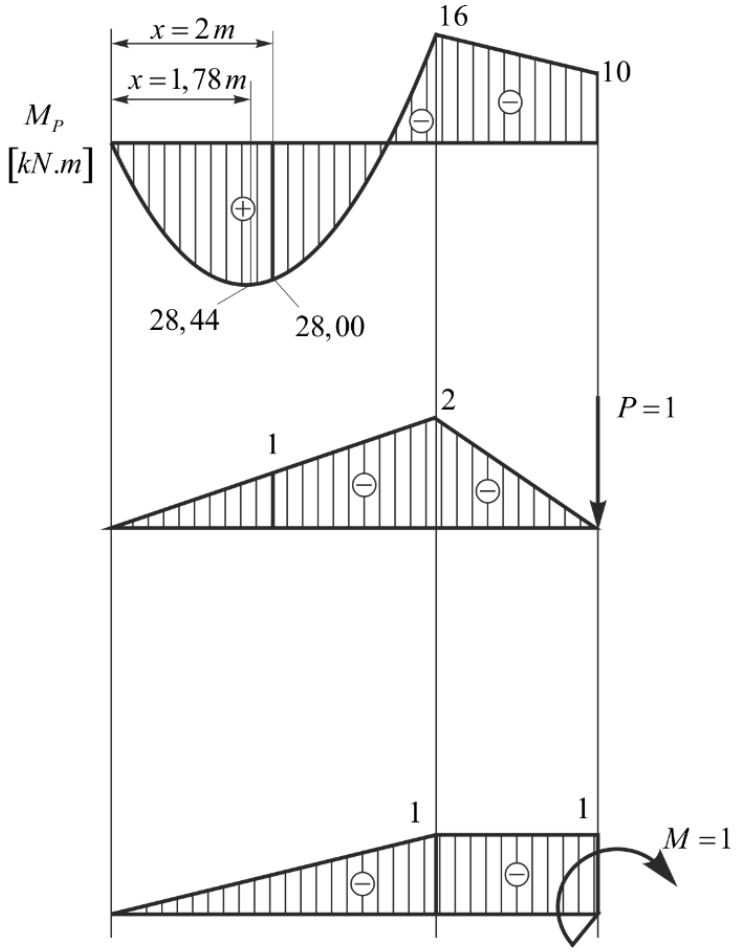
Дадена е греда натоварена съгласно схемата (***фиг.2***). Да се определи преместването $\left(\Delta_{C_v}\right)$ и завъртането $\left(\mu_C\right)$ на т. С, ако

$$E=2{,}1.10^{11}\,Pa;\;J_1=2550.10^{-8}\,m^4;\;\frac{J_1}{J_2}=2{,}5;$$



Фиг. 2

Системата е статически определима. Решаваме гредата от външно натоварване и от виртуални товари $\overline{P}=1;\;\overline{M}=1.$ На ***фиг. 3*** са показани диаграмите от външното натоварване $\left(M_p\right)$ и виртуалното натоварване $\left(P=1;\;M=1\right)$ в т. С.



Фиг. 3

а) Определяне на вертикалното преместване в т.С.

$$EJ_C\Delta_{C_v}=\begin{bmatrix}-2 & 0\end{bmatrix}\frac{5}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-16\\-10\end{bmatrix}+\frac{2}{3}.2\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\28\\-16\end{bmatrix}=16,67\,kNm^3;$$

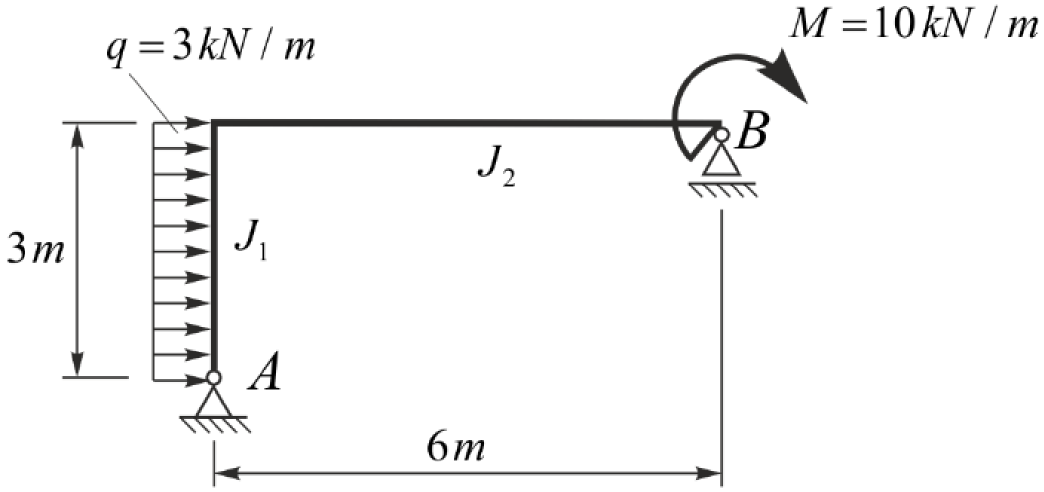
$$\Delta_{C_v}=\frac{16,67.10^3}{2,1.10^{11}.2550.10^{-8}}=0,0031m.$$

б) Определяне на завъртането на т. С

$$EJ_C\mu_C=\begin{bmatrix}-1 & -1\end{bmatrix}\frac{5}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-16\\-10\end{bmatrix}+\frac{2}{3}.2\begin{bmatrix}0 & -0,5 & -0,5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\28\\-16\end{bmatrix}=38,33kNm^2;$$

$$\mu_C=\frac{38,33.10^3}{2,1.10^{11}.2550.10^{-8}}=0,0071rad=0,4^\circ.$$

Пример 2. За показаната на ***фиг. 4*** рамка да се определят хоризонталното преместване на т. В $\left(\Delta_{B_h}\right)$ и завъртането на т. В $\left(\mu_B\right)$, ако $E=2,1.10^{11}\,Pa;\ J_1=19068.10^{-8}\,m^4;\ \frac{J_1}{J_2}=2,0;$



Фиг. 4

Решаваме рамката от външното натоварване и от виртуалните товари $P_h=1$ и $M=1$, приложени в т. В. M_p -диаграмата и единичните диаграми са показани на ***фиг. 5***.

а) Определяне на хоризонталното преместване на т. В.

$$EJ_C\Delta_{B_h}=\frac{2}{3}.1,5\begin{bmatrix}0 & -1,5 & -1,5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\10,125\\13,5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 0\end{bmatrix}\frac{12}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13,5\\-10\end{bmatrix}=-152,625kNm^3;$$

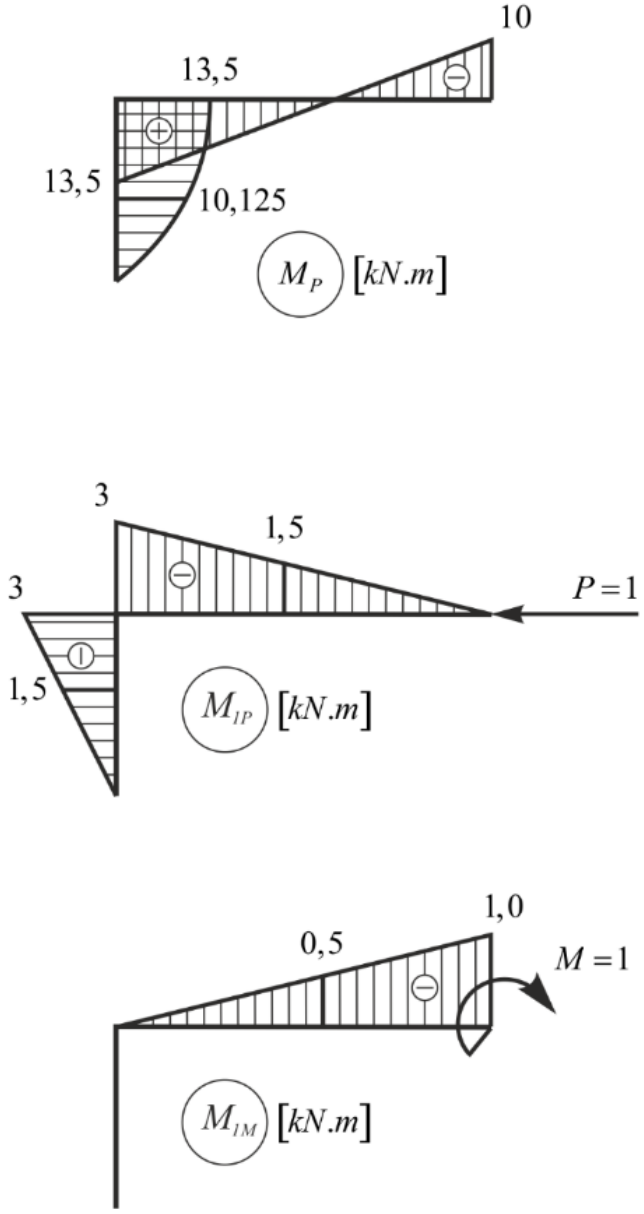
$$\Delta_{B_h}=\frac{-152,625.10^3}{2,1.10^{11}.19068.10^{-8}}=-0,0038m.$$

-преместването е в обратна посока на приложената сила $P=1$.

б) Определяне на завъртането на т. В.

$$EJ_C\mu_B=\begin{bmatrix}0 & -1\end{bmatrix}\frac{12}{6}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13,5\\-10\end{bmatrix}=13kNm^2;$$

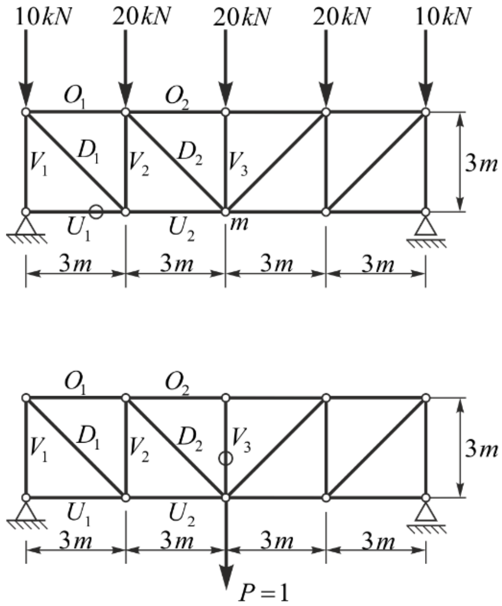
$$\mu_B=\frac{13.10^3}{2,1.10^{11}.19068.10^{-8}}=0,00032rad=0,0186^\circ.$$



Фиг. 5

Пример 3: Дадена е равнинна ферма, натоварена във възлите на горен пояс, съгласно ***фиг. 6***. Да се определи вертикалното провисване m $\left(\Delta_{m_v}=?\right)$ в средата на долния пояс, ако $E=2,1.10^{11}\,Pa$.

Фермата и натоварването й са симетрични. Затова определяме усилията в прътите от лявата половина на фермата. Усилията от външното натоварване и виртуалната сила $P=1$, определяме чрез Ритеров разрез и изрязване на възлите.



Фиг. 6

След определяне на усилията и редуциране на дължините в слабо натоварените пръти, матричното уравнение има следния вид:

$$EF_c\Delta_{m_v}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc} O_1 & O_2 & V_1 & V_2 & V_3 & D_1 & D_2 & U_1 & U_2\end{array}\\ \begin{bmatrix}-0{,}5 & -1 & -0{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0{,}707 & 0{,}707 & 0 & 0{,}5\end{bmatrix}\end{array}.\begin{bmatrix}3{,}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&3{,}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&3{,}0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&3{,}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&4{,}5&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&4{,}24&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&8{,}48&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&6{,}0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&3{,}0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-30\\-40\\-40\\-30\\-10\\42{,}43\\14{,}14\\0\\-30\end{bmatrix}=874{,}26\,kN.m$$

Израза за редуцираната дължина на прътите е: $s'=s\dfrac{F_C}{F}$

където:

F_C - целесъобразно избрана сравнителна площ $\left(F_C=20cm^2\right)$;

s' - редуцирана дължина на пръта;

Определяне на вертикалното провисване m в средата на долния пояс:

$$EF_c\Delta_{m_v}=874{,}26\,kN.m$$

$$\Rightarrow \Delta_{m_v}=\frac{874{,}26.10^3}{2{,}1.10^{11}.20.10^{-4}}=0{,}002\,m$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ангелов, И. 2011. Матрична механика Статика. София
2. Карамански, Т. 1976. Числени методи в строителната механика. София
3. Карамански, Т. Рангелов, Р. 1976. Методическо ръководство за решаване на задачи по строителна статика.
4. Квартирников, А.1978. Строителна статика част I и II. София
5. Кисьов, И. 1978. Съпротивление на материалите.София